退化 BELTRAMI 方程式　〜古典的アプローチ〜

須川 敏幸　　京都大学大学院・理学研究科

この講演では V. Gutlyanskiĭ, O. Martio, M. Vuorinen との共同研究 [10] に基づいて、複素平面上の退化 Beltrami 方程式が同相解を持つための非常に精密な十分条件について、およびその解が（本質的に）一意的であるための特殊な状況下での十分条件について述べる。その前に、Beltrami 方程式の重要性とその歴史的展開について見ておきたい。

1. Beltrami 方程式

今日 Beltrami 方程式と呼ばれるものは次の形で表される平面領域上の偏微分方程式である：

$$\bar{\partial} f = \mu \partial f \tag{1.1}$$

ただしここに f は複素数値の未知関数で、μ はしばしば Beltrami 係数と呼ばれる $|\mu| < 1$ を満たす与えられた複素数値関数であり、記号 $\partial f, \bar{\partial} f$ は

$$\partial f = f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \bar{\partial} f = f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad z = x + iy$$

により定義される。ここに $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表す。f を実部・虚部に分ければ、この方程式は偏微分方程式系に書き換えられるが、条件 $|\mu| < 1$ は系の楕円性を意味する（詳しくは [5, Chap. 6] 参照）。(1.1) において、等号の意味について厳密に定式化する必要があるが、右辺において各点ごとの掛け算が必要なため、考えられるもっとも一般な状況は μ が可測で f が（局所）Sobolev 空間 $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に属することであろう。つまり、$\partial f, \bar{\partial} f$ は超関数の意味で考えるが、それらは局所可積分であり本質的有界関数 μ との積もまた局所可積分となるので方程式(1.1) が a.e. の意味で理解できることになる。以下において、f をこの方程式(1.1) の領域 Ω 上の**同相解**と呼ぶ場合は、f は Ω からある平面領域 Ω' への同相写像でなおかつ $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ であり方程式(1.1) を上の意味で満たすことを意味するものとする。なお、以下において領域について明言しない場合は、$\Omega = \Omega' = \mathbb{C}$ であると約束する。このような同相解はしばしば μ-**同相写像**などと呼ばれる。なお、無限遠点をそれ自身に対応させることにより、このような f は自然にリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ からそれ自身への同相写像ともみなせることに注意しておく。

容易に分かるように、f が(1.1) の $\mathbb{C}$ 上の同相解であれば、定数 a, b に対して $af + b$ も (1.1) の解である。よって同相解としては $f(0) = 0, f(1) = 1$ の形に正規化されているもののみを考えても一般性を失わない。以下では、方程式(1.1) の同相解は本質的に一意的である、という場合にはこのように正規化された同相解が一意であることを意味することとする。実は上の相似変換だけではなく、任意の解析関数 φ との合成 $\varphi \circ f$ も局所的には同じ Beltrami 方程式を満たすことが分かるが、このことは Beltrami 方程式が Riemann 面の moduli を記述する上で重要であることを示唆している。より一般に方程式(1.1) がそ

の解のクラス $\mathcal{G}$ に対して **Stoïlow 性を持つ**とは、任意の $g \in \mathcal{G}$ が正規化された同相解 f および解析関数 φ との合成 $\varphi \circ f$ の形に分解できることを言う。

2. Beltrami 方程式の歴史

Beltrami 方程式は滑らかな μ に対して、曲面上の等温座標 (isothermal coordinates) を構成するのに 1820 年代に Gauss によって用いられたのが最初であると言われている。その後、Beltrami によって彼の 1867 年頃に始まる Lobachevsky 幾何学における重要な研究において本質的に用いられたことから、この方程式に彼の名が冠されるようになったようである（[11] 序文参照)。Beltrami 方程式の幾何的な意味については、例えば [21, §1.1] や [17, II.3] などを参照されたい。

前節のように可測な μ について重要な研究を行ったのは Morrey によるのが最初であろう。彼は 1930 年代後半に一様楕円性条件 $\|\mu\|_\infty < 1$ の下で Beltrami 方程式の $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解の存在と一意性を確立した。一方、1928 年頃に Grötzsch によって研究が始められ、Ahlfors, Teichmüller らにより重要な研究に本質的に用いられていた擬等角写像という概念が、実はこの一様楕円な Beltrami 方程式の $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解と全く同じであることを最初に指摘したのは Bers (1957) であった（[14, p. 24])。擬等角写像が、極値的長さに関係する幾何的な定義と、Beltrami 方程式による解析的定義の、見た目には全く異なる二つの側面を持つことが認識されたことが、今日擬等角写像が非常に広く複素解析学全般で用いられるようになったきっかけと言っても良いであろう。その記念碑的な文献が Lehto-Virtanen による [15]（オリジナルはドイツ語で 1965 年公刊）である。なお、この Morrey による定理は現在では"可測型 Riemann 写像定理"(the measurable Riemann mapping theorem) と呼ばれ、平面擬等角写像論における基本的結果となっている（[1] 参照)。なお、擬等角写像は自然に Riemann 面上でも定義できることに注意しておく。

その後、この一様楕円性条件 $\|\mu\|_\infty < 1$ があまりにも当然な前提となってしまったので、この条件抜きで何が言え、何の役に立つのか、多くの人々はあまり考えなくなったようにみえる。しかし、文献を紐解いてみると、このような退化した場合でもいくつか重要な研究が散発的に現れていることが分かる。

まず、退化した場合を考える意味であるが、擬等角写像による面の変形はそれほど劇的ではない。例えば、単位円板 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ と全平面 $\mathbb{C}$ が等角同値ではないのと同様に、これらは擬等角同値ではない。また、Riemann 面全体を擬等角同値類で分類してもなお非可算無限個の類が存在する（より強いことが大沢氏 [18] により示されている)。従って、Riemann 面の退化を理解したり、Riemann 面をより大雑把に分類するには、擬等角写像より広いクラスの写像を考察することが重要となるであろう。他にも、向き付けられた 2 次元 Riemann 多様体の等角構造の型を決定する型問題、亜音速の流体が音速に近づく場合の空力学（Bers [3] 参照）など、応用の可能性はいくつかある。

次に退化 Beltrami 方程式の研究の歴史についてみてみたい。μ を平面上の可測関数とし、ある除外集合を除いて $|\mu| < 1$ が成り立つとする。$\mathrm{Reg}(\mu) = \{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}; \exists V : z_0$ の近傍 s.t. $\|\mu\|_{L^\infty(V)} < 1\}$ とし、$\mathrm{Sing}(\mu) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Reg}(\mu)$ とする。作り方から $\mathrm{Sing}(\mu)$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の閉集合である。Beltrami 方程式(1.1) が $\mathrm{Reg}(\mu)$ 上で $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解を持つことは Riemann 面の一意化の議論から比較的容易に従う（[2], [4] 参照)。問題は、そのような同相解がいつ複素平面全体に同相に拡張できるかである。$\mathrm{Sing}(\mu)$ が全不連結である場合には比較的扱いが簡単で、Lehto [12], [13] が非常に鋭い、しかし複雑な十分条件を与えている。そうでない場合は、このようなアプローチは簡単には適用できない（たとえば、$|\mu| < 1$ a.e. かつ $\mathrm{Sing}(\mu) = \widehat{\mathbb{C}}$ となる例が簡単に構成できる)。

より一般の状況における解の存在について最初の重要なステップは Pesin [19] により得られた。Beltrami 係数 μ に対して dilatation K_μ を

$$K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$$

により定義する。すると、[19] の主結果は、ある $p>1$ に対して

$$\iint_{\mathbb{D}} \exp\left(K_\mu(z)^p\right) dxdy < \infty \tag{2.1}$$

ならば(1.1) の同相解 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ で $f\in W^{1,q}(\mathbb{D}), \forall q\in[1,2),$ かつ $f^{-1}\in W^{1,2}(\mathbb{D})$ を満たすものが存在することを主張する。また Miklyukov-Suvorov [16] は、ある $K_0\in W_0^{1,2}(\mathbb{D})$ と定数 C_0 が存在して $K_\mu\le K_0+C_0$ となるとき、(1.1) は単位円板上で本質的に一意的な $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ を持ち、しかも $f, f^{-1}\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ となることを示した。

次の breakthrough は、David [8] により得られた。David の主結果は、ある定数 $c>0$ に対して

$$\iint_{\mathbb{C}} \exp\left(cK_\mu(z)\right) dxdy < \infty \tag{2.2}$$

が成り立つならば(1.1) は本質的に一意的な $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解を持つことを主張している。([22] も参照のこと。)ついで、Brakalova-Jenkins [7] の結果は少し修正すれば、

$$\iint_{\mathbb{C}} \exp\left(\frac{K_\mu(z)}{1+\log K_\mu(z)}\right)\frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2} < \infty \tag{2.3}$$

の仮定の下で $f\in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}), \forall q\in[1,2),$ を満たす同相解の存在を意味する。この結果の別のアプローチについては、[11] を参照されたい。

4 節で説明する我々の結果は、このような発展の流れに対して、ある意味で最終的な存在定理を与えるものと考えられる。なお、David や、Iwaniec やその共著者らの方法は、主に Bojarski [6] によって見いだされた、特異積分作用素(Hilbert 変換)の詳しい性質を用いるもので、主に実解析的な手法に頼っており、Orlicz-Sobolev 空間に関する議論や Jacobian に関する逆 Hölder 不等式など、非常に高度な結果を必要とする。それに対して、Pesin, Brakalova-Jenkins らの方法は、Ahlfors により開拓された“長さと面積の方法”を基礎としており、ある意味で古典的・幾何的である。我々の手法も基本的にはそのような古典的な流れを汲むものである。

3. 準備

我々の主張を最も一般の形で述べるためには、いくつか準備が必要である。

開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上に与えられた Beltrami 係数 μ に対して、μ の $z_0\in\mathbb{C}$ における**角歪曲度** (angular dilatation) $D_{\mu,z_0}(z)$ を

$$D_{\mu,z_0}(z) = \frac{\left|1-\mu(z)\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}, \quad z\in\Omega, \tag{3.1}$$

によって定義する。また、$z_0=\infty$ に対しては $D_{\mu,\infty}(z)=D_{\mu,0}(z)$ と定める。三角不等式から容易に分かるように $1/K_\mu\le D_{\mu,z_0}\le K_\mu$ a.e. が成り立つ。例えばある非負可測関数 $\rho(z)$ があって、$\mu(z)=\rho(z)z/\bar z$ と表せるならば、$D_{\mu,0}=(1-\rho)/(1+\rho)\le 1$ となり、仮に

$\|\rho\|_\infty = 1$ であっても $D_{\mu,0}$ は本質的有界となる。この量の重要性は次の関係式から来る：f を μ-同相とし、$z = z_0 + re^{i\theta}$ と表記すると

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \theta}(z)\right|^2 = r^2 D_{\mu,z_0}(z) J_f(z) \tag{3.2}$$

である。ただしここに $J_f = |\partial f|^2 - |\bar{\partial} f|^2 = (1-|\mu|^2)|\partial f|^2$ は f の Jacobian である。

次に、関数 $H : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ が**支配因子**であるとは次の 2 性質が成り立つこととする：

1. ある $x_0 \geq 0$ があって、$H(x)$ は $[x_0, +\infty)$ 上で連続かつ狭義単調増大で、$[0, x_0]$ 上では一定、つまり $H(x) = H(x_0)$ である。
2. 関数 $\exp \circ H$ は $[0, +\infty)$ において凸である。

このとき、特に $x \to +\infty$ の時 $H(x) \to +\infty$ であることが分かる。以下では、H^{-1} を $H : [x_0, \infty) \to [H(0), +\infty)$ の逆関数として定義することとする。支配因子 H が**発散型**であるとは

$$\int_1^{+\infty} \frac{H(x)dx}{x^2} = +\infty, \tag{3.3}$$

が成り立つことを意味し、発散型でないとき**収束型**と呼ぶ。簡単な計算により H が発散型であるためには十分大きな t_1 に対して

$$\int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{H^{-1}(t)} = +\infty \tag{3.4}$$

であることが必要十分であることが分かる。$H(x)$ を支配因子とするとき、任意の正数 $\eta > 0$ に対して関数 $H(\eta x)$ および $\eta H(x)$ もともに同じ型の支配因子となることに注意しておく。

支配因子の典型的な例を構成するため、いくつか初等的な関数を定義しておく。

$$\log_0 x = x, \quad \log_n x = \log(\log_{n-1} x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$
$$\Pi_{n,\alpha}(x) = x(\log_1 x) \cdots (\log_{n-1} x)(\log_n x)^\alpha, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \alpha \in \mathbb{R}).$$

整数 $n \geq 0$ および $\alpha \in \mathbb{R}$ を固定する。このとき、十分大きな正数 x_0 をとって、関数 $H = H_{n,\alpha}$ を $H(x) = x^2/\Pi_{n,\alpha}(x),\ x \geq x_0,\ H(x) = H(x_0),\ 0 \leq x \leq x_0$ によって定義すれば、H が支配因子になることが分かる。さらに、簡単な計算によって次のことが分かる。

補題 1. 支配因子 $H_{n,\alpha}$ が発散型 $\Leftrightarrow$ $\alpha \leq 1$.

また、$H(x) = x,\ H(x) = x/(1 + \log^+ x)$ などが発散型支配因子であることも容易に分かる。

区間 $(0, \delta)$ 上で定義された正値関数 $m(r)$ が発散型支配因子 H に対する **modulus bound** であるとは、

$$\liminf_{r \to 0} \int_0^{m(r)} \frac{dt}{H^{-1}(2t - 2\log r)} > 0 \tag{3.5}$$

が成り立つことをいう。コンパクト集合 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が $z_0 \in E$ において **H-疎**であるとは、H に対する modulus bound $m(r)$ が存在して、任意の小さい数 $\varepsilon > 0$ に対してある $0 < r < \varepsilon$ が存在して $A_m(z_0, r) \cap E = \emptyset$ となることをいう。ただし、ここに $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して $A_m(z_0, r) = \{z; re^{-m(r)} < |z - z_0| < r\}$ とし、$z_0 = \infty$ に対しては $A_m(\infty, r) = \{z; 1/r < |z| < e^{m(r)}/r\}$

とする。また、$m(r)$ を正定数に置き換えて同様の条件が成り立つとき、E は z_0 において**径疎**であるという。

4. 主定理

我々の存在定理のもっとも一般的な形は次のようなものである。相当複雑な十分条件であるが、各点ごとの条件であることに注意して頂きたい。なお、以下では $z_0 \in \mathbb{C}$ に対しては $B(z_0, r) = \{z; |z - z_0| < r\}$ とし、$z_0 = \infty$ に対しては $B(\infty, r) = B(0, 1/r)$ とする。

定理 1. **μ を平面上定義された Beltrami 係数とする。ある $p > 1$ が存在して $K_\mu \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ であるとし、さらに各点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して、ある正定数 $M = M(z_0)$, $r_0 = r_0(z_0)$ が存在して、次の条件のうちいずれかが成立するとする：**

1) **$B(z_0, r_0)$ 上ほとんどいたるところ $D_{\mu, z_0} \le M$ である。**
2) **ある発散型支配因子 $H = H_{z_0}$ が存在して、**

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ の時、} \quad \iint_{B(z_0, r_0)} \exp(H(D_{\mu, z_0}(z))) dx dy \le M,$$

$$z_0 = \infty \text{ の時、} \quad \iint_{B(\infty, r_0)} \exp(H(D_{\mu, 0}(z))) \frac{dx dy}{|z|^4} \le M.$$

このとき、正規化された μ-同相写像 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ で、$f \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$, $q = 2p/(1+p)$, および $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ を満たすものが存在し、$|z - z_0| < r_1$, $|z_0| \le R_0$ に対して場合 1) および 2) に応じてそれぞれ次の連続度評価を満足する：$|f(z) - f(z_0)| \le C|z - z_0|^{1/M}$ または

$$|f(z) - f(z_0)| \le C \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_{1+c}^{2m+c} \frac{dt}{H^{-1}_{z_0}(t)} \right\},$$

ただし、ここに $r_1 \le \min\{r_0(z_0), R_0\}$, $m = \log(r_1/|z - z_0|)$, $c = \log(M(z_0)/\pi r_1^2)$ とし、C は μ および R_0 のみに依存する定数とする。

定理における条件はチェックするのが非常に難しそうであるが、特殊な状況下ではそれほど難しくはない。たとえば、$\mathrm{Sing}(\mu)$ が 1 点からなる場合でも十分に興味深い。f_1, f_2 は単位円板の外側では恒等写像で、$\mathbb{D} \setminus \{0\}$ では

$$f_1(z) = \frac{z}{|z|^2} e^{2(1-1/|z|)}, \quad f_2(z) = \frac{z}{|z|(2 - |z|)}$$

で定義すると、$\bar{\partial} f_1 / \partial f_1 = -\bar{\partial} f_2 / \partial f_2 = (1 - |z|) z / \bar{z}, |z| < 1,$ であるが、f_1 が原点まで同相に拡張できるのに対して、f_2 については $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ の像が $|z| > 1/2$ となり「空洞化現象」が起こる。これらの例を上の定理に当てはめて考えてみて頂きたい。別の特別な状況は、ある発散型支配因子 H に対して、

$$\iint_{\mathbb{C}} \exp(H(K_\mu(z))) \frac{dx dy}{(1 + |z|^2)^2} < \infty \tag{4.1}$$

が成り立つ場合で、この時は定理から解の存在などが従うことになる。一方、H が収束型の場合には Iwaniec-Martin [11] が「空洞化現象」を起こす（従って同相解を持たない）ような Beltrami 係数の例を与えている。従って、上の結論は H に関しては最良であるとも言える。

特に、前節で挙げた具体的な形の H を当てはめれば、次の結果を得る。

定理 2. **与えられた可測関数 $H : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ が、ある整数 $n \geq 1$ および定数 $c > 0$, $\alpha \in (-\infty, 1]$ に対して $H(t) \geq ct/(\log t)(\log_2 t)\cdots(\log_{n-1} t)(\log_n t)^\alpha$ を十分大きな t について満足するとする。平面上に与えられた Beltrami 係数 μ が条件**

$$\iint_{\mathbb{C}} \exp\left(H(K_\mu(z))\right) \frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2} < +\infty \tag{4.2}$$

を満たすとすると、μ-同相写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で、$f \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}) \forall q \in [1,2)$ かつ $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ を満たし、さらに $\alpha < 1$（かつ $n = 1$ のときは $0 < \alpha$）であれば、f は不等式

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C \exp\left(-\frac{c}{2(1-\alpha)}\left(\log_{n+1}\frac{1}{|z-z_0|}\right)^{1-\alpha}\right), \quad |z - z_0| < \delta_0,$$

を満たす。ここに、$C > 0, \delta_0 > 0$ は局所一様に取ることができる。$n = 1, \alpha \leq 0$ の場合は、定数 $c/2(1-\alpha)$ を任意のそれより大きな定数に置き換えれば、やはり不等式が成立する。上記不等式において、定数 $c/2(1-\alpha)$ および指数 $1-\alpha$ はそれ以上小さい定数で置き換えることはできない。さらに、$\alpha > 1$ ならば、ある H に対して同相解を持たないような Beltrami 係数 μ で、条件式(4.2) を満たすものが存在する。

以上の定理において、解の正則性（たとえば、$f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ か？）や一意性については今のところこれ以上のことは言えていない。ただ、特異性集合 $\mathrm{Sing}(\mu)$ に強い制約条件を付けると、強い意味での一意性が言える。

定理 3. **μ を平面上で与えられた Beltrami 係数とし、$E = \mathrm{Sing}(\mu)$ とする。各点 $z_0 \in E$ に対して次の条件のうちいずれか一つが成立すると仮定する：**

1) **$D_{\mu,z_0}(z)$ は z_0 の近傍において本質的有界で、E は z_0 において径疎である。**
2) **ある発散型支配因子 $H = H_{z_0}$ が存在して、E は z_0 において H-疎であり、しかも z_0 のある近傍 V に対して**

$$\iint_V \exp(H(D_{\mu,z_0}(z)))\frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2} < +\infty$$

が成立する。

この時、ある同相写像 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が存在して $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ において局所擬等角となり(1.1) を満たす。さらに、$\hat{f}$ を任意の Ω 上の μ-同相写像とすると、ある Möbius 変換 h が存在して $\hat{f} = h \circ f$ と表すことができる。特に $\hat{f}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の同相写像に拡張することができる。

5. 証明のアイデア

最後に、証明のアイデアについて簡単に説明しておく。Beltrami 方程式の解の存在を言うには、まず μ を性質の良い μ_n で近似する。今の場合は例えば $\mu_n = \chi_n \cdot \mu$ とする。ただし、ここに χ_n は集合 $\{z; |\mu(z)| < 1 - 1/n\}$ の定義関数とする。すると可測型 Riemann 写像定理により、正規化された μ_n-同相 $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が一意に存在することが分かる。あとは族 $\{f_n\}$ の正規性を何とかして示せばよい。（極限関数の正則性や実際に Beltrami 方程式を満たすことなどは [19] や [7] の方法に従えばよい。）

$A(z_0, r, R) = B(z_0, R) \setminus \bar{B}(z_0, r)$ とする。定理 1 の条件 2) に対して、Reich-Warczak の不等式 [20] や、Jensen の不等式、Chebyshev の不等式などを用いれば、最終的に $f(A(z_0, r, R))$ の modulus が R を固定して r を 0 に近づければ大きくなることが評価込みで示される。一方、任意の $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $f(A(z_0, r, R))$ の modulus が与えられた関数 $\rho(z_0, r, R)$

で下から押さえられるような正規化された同相写像の族を考えると、その関数が条件 $\lim_{r\to 0}\rho(z_0,r,R)=\infty$ を各 z_0, R ごとに満たせば、そのような族は正規になることが分かる。なお、連続度評価については、Teichmüller の定理を基礎とする、円環領域とその modulus に関する具体的評価を用いる。

定理 3 は、上で述べた modulus の評価と、後藤-谷口による結果 [9] を用いればよい。

References

1. L. V. Ahlfors and L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 385–404.
2. P. P. Belinskiĭ, *General properties of quasiconformal mappings* (Russian), Izdat. "Nauka" Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1974.
3. L. Bers, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1958, Surveys in Applied Mathematics, Vol. 3.
4. ———, *Uniformization by Beltrami equation*, Commun. in Pure and Appl. Math. **14** (1961), 215–228.
5. L. Bers and M. Schechter, *Elliptic equations*, in Partial Differential Equations (Proc. Summer Seminar, Boulder, Col., 1957), Interscience, New York, 1964, pp. 131–299.
6. B. V. Bojarski, *General solutions of a system of differential equations of the first order and of elliptic type with discontinuous coefficients* (Russian), Mat. Sb. N.S. **43 (85)** (1957), 451–503.
7. M. A. Brakalova and J. A. Jenkins, *On solutions of the Beltrami equation*, J. Anal. Math. **76** (1998), 67–92.
8. G. David, *Solutions de l'équation de Beltrami avec* $\|\mu\|_\infty = 1$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **13** (1988), 25–70.
9. Y. Gotoh and M. Taniguchi, *A condition of quasiconformal extendability*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **75** (1999), 58–60.
10. V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, T. Sugawa, and M. Vuorinen, *On the degenerate Beltrami equation*, University of Helsinki, Preprint 282 (2001), 1–32. (http://www.cajpn.org/complex/pp01/0103.html)
11. T. Iwaniec and G. Martin, *The Beltrami equation – In memory of Eugenio Beltrami (1835–1900), 100 years on*, Memoires of the AMS, American Mathematical Society, to appear.
12. O. Lehto, *Homeomorphisms with a given dilatation*, Proceedings of the Fifteenth Scandinavian Congress (Oslo, 1968), Springer, 1970, pp. 58–73.
13. ———, *Remarks on generalized Beltrami equations and conformal mappings*, Proceedings of the Romanian-Finnish Seminar on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings (Braşov, 1969), Publ. House of the Acad. of the Socialist Republic of Romania, Bucharest, 1971, pp. 203–214.
14. ———, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, 1987.
15. O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane, 2nd Ed.*, Springer-Verlag, 1973.
16. V. M. Miklyukov and G. D. Suvorov, *The existence and uniqueness of quasiconformal mappings with unbounded characteristics* (Russian), Studies in the theory of functions of a complex variable and its applications, Vidannja Inst. Mat. Akad. Nauk Ukraïn. RSR, Kiev, 1972, pp. 45–53.
17. J. C. C. Nitsche, *Lectures on Minimal Surfaces, Vol. 1*, Cambridge University Press, 1989.
18. T. Ohsawa, *On the analytic structure of certain infinite dimensional Teichmüller spaces*, Nagoya Math. J. **141** (1996), 143–156.
19. I. N. Pesin, *Mappings which are quasiconformal in the mean* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **187** (1969), 740–742, English translation in Soviet Math. Dokl. **10** (1969), 939–941.
20. E. Reich and H. Walczak, *On the behavior of quasiconformal mappings at a point*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 338–351.
21. M. Schiffer and D. C. Spencer, *Functionals of Finite Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1954.
22. P. Tukia, *Compactness properties of* μ*-homeomorphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **16** (1991), 47–69.