ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 393, № 1, с. 1–3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

О ТЕОРЕМАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2003 г. М. Вуоринен, В. Я. Гутлянский, О. Мартио, Т. Сугава

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 05.03.2003 г.

Поступило 28.03.2003 г.

1. Аналитическая теория квазиконформных отображений на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ связана с исследованием гомеоморфных обобщенных решений уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z \tag{1}$$

с измеримым комплексно-значным коэффициентом μ, удовлетворяющим равномерному условию эллиптичности $\|\mu\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |\mu(z)| \le k < 1$. В случае, если $|\mu(z)| < 1$ для почти всех $z \in \mathbb{C}$ и $\|\mu\|_\infty = 1$, уравнение (1) называется вырожденным. Условимся под решением уравнения (1) понимать функцию f класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$, обобщенные частные производные которой удовлетворяют (1) почти всюду. Хорошо известно, что в случае $\|\mu\|_\infty < 1$ существует, а при надлежащей нормировке единственное гомеоморфное решение $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ уравнения (1), осуществляющее квазиконформное отображение комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на себя (см. [5, с. 174]). Если же $\|\mu\|_\infty = 1$, уравнение (1) может вовсе не иметь гомеоморфных решений, а в случае присутствия такого решения оно может оказаться неединственным.

Проблема существования и структура решений уравнения Бельтрами с вырождением являются предметом интенсивных исследований (см., например, [1–3, 6–8]). Это связано, в частности, с известной ролью этого уравнения в теории эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных, дифференциальной геометрии и некоторых вопросах механики сплошной среды. Отметим, что теоремы существования, доказанные в отмеченных выше работах, записаны в терминах ограниченности некоторых интегралов, зависящих только от $|\mu|$. Следующий пример показывает, что для более детального исследования уравнения (1), роль $\arg \mu$ следует также учитывать. Действительно, функция $f_1(z) = \dfrac{z e^{2(1-1/|z|)}}{|z|^2}$, $f(0) = 0$, осуществляет гомеоморфное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на себя и удовлетворяет уравнению (1) с $\mu_1(z) = \dfrac{(1-|z|)z}{\bar{z}}$. Кроме того, функция $f_2(z) = \dfrac{z}{2|z| - |z|^2}$, $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ является решением уравнения (1) с коэффициентом $\mu_2 = -\mu_1$ и обладает эффектом кавитации, так как она отображает $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ гомеоморфно на круговое кольцо $\frac{1}{2} < |z| < 1$. Вместе с тем $\|\mu_k\|_\infty = 1$, $k = 1, 2$, и $|\mu_1| = |\mu_2|$. Таким образом, для изучения эффекта кавитации необходимо учитывать поведение аргумента коэффициента $\mu(z)$.

В нашей работе установлены новые теоремы существования и единственности для уравнения Бельтрами с вырождением, в которых наряду с $|\mu(z)|$ поведение $\arg \mu(z)$ также играет существенную роль.

Отметим, что идея использования μ вместо $|\mu|$ при исследовании проблемы существования гомеоморфных решений уравнения Бельтрами с вырождением восходит к работе [4].

2. Обозначим через $\hat{\mathbb{C}}$ расширенную комплексную плоскость и условимся гомеоморфизм $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ называть нормированным, если он сохраняет точки 0, 1 и ∞. Далее для коэффициента Бельтрами $\mu(z)$, удовлетворяющего для почти всех $z \in \mathbb{C}$ неравенству $|\mu(z)| < 1$, положим

$$D_{\mu, z_0}(z) = \frac{\left|1 - \mu(z)\dfrac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}\right|^2}{1 - |\mu(z)|^2} \text{ п.в.,}$$

Department of Mathematics,
University of Helsinki, Finland

Институт прикладной математики и механики
Национальной академии наук Украины, Донецк

Department of Mathematics,
graduate school of Science,
Hiroshima University, Japan

если z_0 конечно, и $D_{\mu,\infty}(z) = D_{\mu,0}(z)$, если $z_0 = \infty$.

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество функций H: $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $H(x)$ непрерывна и строго возрастает для $x \in [x_0, +\infty)$ и некоторого $x_0 \geq 0$, и $H(x) = H(x_0)$, если $x \in [0, x_0]$;

2) $e^{H(x)}$ выпукла для $x \in [0, +\infty)$;

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{H(x)dx}{x^2} = +\infty$.

Т е о р е м а 1. *Пусть коэффициент* $\mu(z)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $(1 - |\mu|)^{-1} \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ *для некоторого* $p > 1$;

2) *для каждой точки* $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ *найдутся функция* $H_{z_0} \in \mathcal{N}$ *и положительные постоянные* M_{z_0} *и* R_{z_0} *такие, что*

$$\int\limits_{|z-z_0|<R_{z_0}}\int e^{H_{z_0}(D_{\mu,z_0}(z))}dx\,dy \leq M_{z_0}, \quad \text{если} \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

и

$$\int\limits_{|z|>R_{z_0}}\int e^{H_{z_0}(D_{\mu,z_0}(z))}\frac{dx\,dy}{|z|^4} \leq M_{z_0}, \quad \text{если} \quad z_0 = \infty.$$

Тогда существует нормированное гомеоморфное решение f: $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *уравнения* (1), *такое,* что $f \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$, $q = \frac{2p}{1+p}$, и $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1 основано на аппроксимации коэффициента μ надлежащими срезками μ_n с $\|\mu_n\|_\infty < 1$ обосновании предельного перехода $f_n \to f$ для соответствующей последовательности f_n квазиконформных отображений.

З а м е ч а н и е 1. Для гомеоморфизма f из теоремы 1 справедлива оценка

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{(1+c)}^{2m+c}\frac{dt}{H^{-1}_{z_0}(t)}\right\}$$

при условии, что $|z - z_0| < r_1$, $|z_0| \leq R$ и $r_1 \leq \min\{R_{z_0}, R\}$. Здесь $m = \ln\frac{r_1}{|z-z_0|}$, $c = \ln\frac{M_{z_0}}{\pi r_1^2}$, R – положительная постоянная и C – некоторая постоянная, зависящая только от μ и R.

З а м е ч а н и е 2. Примерами функций $H \in \mathcal{N}$ могут служить ηx и $\frac{\eta x}{1+\ln^+ x}$ с положительной постоянной η.

Следующее утверждение вытекает из теоремы 1, если заметить, что для почти всех $z \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$D_{\mu,z_0}(z) \leq \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} \equiv K_\mu(z).$$

Т е о р е м а 2. *Если для некоторой функции* $H \in \mathcal{N}$ *коэффициент Бельтрами* μ *удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} e^{H(K_f(z))}dA_z < +\infty,$$

то существует гомеоморфизм f: $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *уравнения* (1) *такой, что* $f \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ *для любого* $q < 2$ *и* $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$.

Здесь и далее $dA_z = (1 + |z|^2)^{-2}dx\,dy$ обозначает элемент площади на сфере Римана.

Теорема 2 позволяет установить следующий результат, который является расширенной версией соответствующих теорем существования из [1] и [7] (см. также [3, § 11]).

Т е о р е м а 3. *Пусть коэффициент Бельтрами* μ *удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} e^{P(K_\mu(z))}dA_z < +\infty$$

для измеримой функции P: $[1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что для некоторого целого* $n \geq 1$, постоянных $c > 0$, $\alpha \in (-\infty, 1]$ *и достаточно больших* t

$$P(t) \geq \frac{ct}{(\ln t)(\log_2 t)\cdots(\log_{n-1}t)(\log_n t)^\alpha}.$$

Тогда существует гомеоморфное решение f: $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *уравнения* (1), *принадлежащее классу Соболева* $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ для $1 \leq q < 2$ *и такое, что* $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$. *При этом, если* $\alpha < 1$ *и дополнительно если* $0 \leq \alpha$ при $n = 1$, *для* f *справедливо неравенство*

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C\exp\left(\frac{-c}{2(1-\alpha)}\left(\log_{n+1}\frac{1}{|z-z_0|}\right)^{1-\alpha}\right),$$

$$|z - z_0| < \delta_0.$$

Здесь $\log_n x = \ln(\log_{n-1}x)$, $\log_0 x = x$ *и постоянные* $C > 0$ и $\delta_0 > 0$ *могут быть выбраны локально равномерно. В случае* $n = 1$ *и* $\alpha < 0$ *неравенство оста-*

ется в силе, если постоянную $\dfrac{c}{2(1-\alpha)}$ *заменить на любое большее число.*

Теорема 3 является точной в том смысле, что для каждого n значение параметра α мне может быть взято большим чем 1. Более того, постоянная $\dfrac{c}{2(1-\alpha)}$ и показатель $1-\alpha$ в оценке модуля непрерывности решения также являются точными.

3. Проблема единственности тесно связана со структурой компактного множества

$$E_\mu = \left\{Z_0 \in \hat{\mathbb{C}}:\ \operatorname{ess}\varlimsup_{z\to z_0}|\mu(z)| = 1\right\}$$

и его образа при отображении $f(z)$. Рассмотрим случай, когда E_μ – всюду разрывное множество и меру его плотности определим следующим образом. Пусть $H \in \mathcal{N}$. Множество E_μ назовем H-разряженным в точке z_0, если найдется функция $\lambda(r)$, для которой

$$\liminf_{r\to 0}\int_0^{\lambda(r)}\frac{dt}{H^{-1}(2t-2\ln r)} > 0$$

и при любом достаточно малом $\delta > 0$ существует r, $0 < r < \delta$, такое, что

$$\{re^{-\lambda(r)} < |z-z_0| < r\} \cap E_\mu = \varnothing.$$

Например, если $H(x) = \eta x$, то в качестве $\lambda(r)$ можно взять $\varepsilon\ln\left(\dfrac{1}{r}\right)$ с любым положительным параметром ε. Если $H(x) = \dfrac{\eta x}{1+\ln^+ x}$, то $\lambda(r) = \varepsilon\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)^C$, где $\varepsilon > 0$ и $C > 1$ – произвольные постоянные.

Теорема 4. *Пусть коэффициент Бельтрами* μ *такой, что множество* E_μ *является* H*-разряженным в каждой точке* $z_0 \in E$. Если

$$\iint_{V_{z_0}} e^{H_{z_0}(D_{\mu,z_0}(z))}\,dA_z < +\infty$$

для некоторой открытой окрестности V_{z_0} *каждой точки* $z_0 \in E_\mu$, *то существует гомеоморфизм* $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, *который является локально квазиконформным в области* $\Omega = \hat{\mathbb{C}}\setminus E_\mu$ *и удовлетворяет уравнению Бельтрами с* μ в Ω. *Любое другое, локально квазиконформное в области* Ω решение $\hat{f}$ *уравнения* (1) *с тем же* μ *имеет вид* $\hat{f} = h\circ f$, где h – *преобразование Мёбиуса.*

Этот результат может быть конкретизирован, если в качестве $H(x)$ выбрать ηx либо $\dfrac{\eta x}{1+\ln^+ x}$, что соответствуют экспоненциальному и субэкспоненциальному условию интегрируемости коэффициентов $D_{\mu,z_0}(z)$ и $K_f(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brakalova M.A., Jenkins J.A.* // J. Anal. Math. 1998. V. 76. P. 67–92.
2. *David G.* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1988. V. 13. P. 25–70.
3. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric Function Theory and Non linear Analysis. Oxford N.Y.: Univ. Press, 2001. 552 p.
4. *Lehto O. Proc.* Scandinavian Congress, Oslo 1968. B.: ger, 1970. P. 58–73.
5. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. 2nd ed. B.: Springer 1973. 258 p.
6. *Миклюков В.М., Суворов Г.Д.* Исследования по теории функций комплексного переменного и ее приложений. Ин-т математики АН Киев: УССР, 1972. С. 45–53.
7. *Песин И.Н.* // ДАН. 1969. Т. 187. № 4. С. 740–742.
8. *Tukia P.* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1991. V. 16. P. 47–69.