円環領域のmodulusと同相写像族のコンパクト性判定法

須川 敏幸 （広島大学大学院理学研究科）

リーマン球面内の二重連結領域を円環領域と呼ぶ．ただしここでは便宜上，２点穴あき球面は円環領域の仲間には加えないものとする．すると，よく知られているように，任意の円環領域 A に対してある数 $R \in (1, +\infty]$ が存在して，A は同心円環 $1 < |z| < R$ と等角同値になる．等角不変量 $\log R$ は A の modulus と呼ばれる．リーマン写像を構成するのが難しいように，実際にはそのような等角写像を具体的に与えるのは困難であり，与えられた円環の modulus を正確に計算によって求めることは一般には望み薄である．しかし，modulus を極値的長さと捕らえることによって十分良い評価が得られることが多い．

さて，一般には円環領域は非常に変な形であり得るが，実は modulus がある一定値よりも大きいと，非圧縮的に含まれる同心円環で，modulus が元の円環の modulus と高々定数差しか異ならないものが存在することが Teichmüller の定理として知られている．この原理を用いて，本講演では与えられた球面 S^2 の自己同相写像族が同心円環の像の modulus に関する非常に一般かつ自然な条件を満たせば正規族になり，極限として得られる写像がやはり同相であることを示したい．なお，副産物としてそのような族の連続度がその条件によって具体的に与えられ，しかも具体的な例では order として sharp になっていることも多い．

このような考察の一つの応用として，ある条件を満たす，球面上の退化 Beltrami 方程式の解の存在定理を紹介する．アイデアは非常に単純で，一様楕円性を満たすような係数により，与えられた退化 Beltrami 方程式の係数を近似する．すると近似している方程式は同相解を持つことが「可測型リーマン写像定理」として知られているが，適当に正規化されたそのような同相解が上記のコンパクト性判定法を満足することを実際にチェックすればよい．

なお，本講演は V. Gutlyanskiĭ, O. Martio, M. Vuorinen 氏らとの共同研究を基にしている．