ある密性条件を満たす集合の一般化容量の評価

須川敏幸

広島大学 大学院理学研究科

1. Hausdorff 容量および測度

この講演では (X, ρ) は常に可分距離空間とする。h を計測関数とする、すなわち h は $(0, +\infty)$ 上で正値 (狭義) 単調増加連続関数とし $h(+0) = 0$ を満たすとする。Borel 集合 $E \subset X$ および $t \in (0, +\infty]$ に対して

$$\mathcal{H}_h^t(E) = \inf \left\{ \sum_j h(\operatorname{diam} U_j); E \subset \bigcup_j U_j, \operatorname{diam} U_j < t \right\}$$

とし、$\mathcal{H}_h(E) = \lim_{t\to 0} \mathcal{H}_h^t(E)$ と定める。$\mathcal{H}_h(E)$ は E の Hausdorff h-測度と呼ばれ、$\mathcal{H}_h^\infty(E)$ は E の Hausdorff h-容量と呼ばれる。$\mathcal{H}_h^\infty(E) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}_h(E) > 0$ であることに注意する。

2. 一般化容量

一般化容量はユークリッド空間の部分集合については Frostman の学位論文 [1] により初めて定義が与えられた。距離空間への一般化および結果の精密化については亀谷 [2] による。

関数 $\Phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を容量核とする、すなわち、連続 (狭義) 減少関数で $\Phi(+0) = +\infty$ を満たすものとする。有界 Borel 集合 E に対して $P(E)$ を E に台を持つ X 上の Borel 確率測度全体のなす集合とする。また、$P_0(X)$ を有界集合に台を持つような X 上の Borel 確率測度全体とする。$\mu \in P_0(X)$ の Φ-ポテンシャル u_μ^Φ を

$$u_\mu^\Phi(x) = \int_X \Phi(\rho(x, y)) d\mu(y), \quad x \in X,$$

によって定める。すると u_μ^Φ は X 上で下半連続である。さらに有界 Borel 集合 E に対して

$$V^\Phi(E) = \inf_{\mu \in P(E)} \|u_\mu^\Phi\|_\infty, \quad ここに \quad \|u_\mu^\Phi\|_\infty = \sup_{x\in X} u_\mu^\Phi(x),$$

とし、E の Φ-容量を

$$C^\Phi(E) = \Phi^{-1}(V^\Phi(E))$$

によって定める。このとき

$$C^\Phi(E) \le \inf_{x\in E} \sup_{y\in E} \rho(x, y) \le \operatorname{diam} E$$

に注意する。

Date: July 4, 2002 数理解析研究所共同研究集会 “ポテンシャル論とその周辺”.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 31A15; Secondary 30C85.
Key words and phrases. Hausdorff content, generalized capacity, uniformly perfect.

3. Hausdorff 容量と一般化容量との関係

次の結果は Erdös-Gillis の結果の一般化である。

定理 1 (Kametani [2]). h を計測関数とし E を X の Borel 部分集合とする。$\Phi(x) = 1/h(x)$ とするとき、$\mathcal{H}_h(E) < \infty$ ならば $C^\Phi(E) = 0$ である。

この定理は定性的なものだが、主張は弱くなるものの、定量的な結果も示される。[2] にこの主張は明示的には現れないが、証明から読みとれる: E を X のコンパクト部分集合とし、$\Phi = 1/h$ とする。このとき

$$\frac{1}{V^\Phi(E)} \le \mathcal{H}_h^\infty(E)$$

が成り立つ。また、逆向きの評価は、(X, ρ) がユークリッド空間である場合には次のような形で示される。(これも [2] には明示的には現れないが、やはり証明から読みとれる。)

定理 2. $X = \mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = |x-y|$ とし、$-\int_0^{t_0} h(t)d\Phi(t) < +\infty$ が十分小さい $t_0 > 0$ に対して成り立つと仮定する。このとき任意のコンパクト集合 $E \subset X$ に対して

$$V^\Phi(E) \le \Phi(r_0) - \frac{A_n}{\mathcal{H}_h^\infty(E)} \int_0^{r_0} h(t)d\Phi(t)$$

が成り立つ。ただし、ここに $r_0 = 2\operatorname{diam} E$ で、A_n は次元 n にのみ依存する正定数である。

系 3.3 (Kametani [2]). 同じ仮定の下で $\mathcal{H}_h^\infty(E) > 0 \Rightarrow C^\Phi(E) > 0$ が成り立つ。

4. 密性条件

$\varphi : (0, r_0) \to \mathbb{R}$ を非減少関数で $0 < \varphi(r) \le r, 0 < r < r_0,$ を満たすものとする。これに対して $A_\varphi(a,r) = \{x \in X; \varphi(r) \le \rho(x,a) \le r\}$ と定める。

空でない閉集合 $E \subset X$ が φ-完全であるとは全ての $a \in E$ かつ $0 < r < r_0$ に対して $E \cap A_\varphi(a,r) \ne \emptyset$ が成り立つことをいう。ある定数 $0 < c \le 1$ に対して $\varphi(r) = cr$ とするとき、この概念は通常の一様完全性と一致する (cf. [3], [4])。

5. 主定理

h を計測関数、$\varphi : (0, r_0) \to \mathbb{R}$ を前節におけるような関数とする。ここで補助関数 ε および δ を

$$h(\varphi(x/3)/2) = \frac{\exp\varepsilon(x)}{2} h(x) \quad \text{and} \quad h(2x) = h(x)\exp\delta(x)$$

によって定義する。

$\nu : (0, x_0) \to \mathbb{R}$ が関数 $\lambda : (0, x_0) \to \mathbb{R}$ の単調優関数であるとは ν が非減少で $0 < x < x_0$ において $|\lambda(x)| \le \nu(x)$ であることをいう。

定理 4. (X, ρ) を完備可分距離空間とする。関数 φ はある定数 $0 < c < 1$ に対して $\varphi(r) \le cr$ が成り立つと仮定する。ε の単調優関数 η で十分小さい $x_0 > 0$ に対して

$$\int_0^{x_0} \frac{\eta(x)dx}{x} < +\infty$$

が成り立つものが存在すると仮定すると、任意のφ-完全な閉集合Eについて $\mathcal{H}_h^\infty(E) > 0$ が成り立つ。さらに、もし δ の単調優関数 ω で十分小さい $x_0 > 0$ について

$$\int_0^{x_0} \frac{\omega(x)dx}{x} < +\infty,$$

を満たすものが存在するとき、φ-完全なコンパクト集合 $E \subset \mathbb{R}$ で $0 < \mathcal{H}_h^\infty(E) \le \mathcal{H}_h(E) < +\infty$ を満たすものが構成できる。

なお、もし (X, ρ) がユークリッド空間であるならば、上の ε の定義において $\varphi(x/3)/2$ を $\varphi(x/3)$ に置き換えることができる。この場合、さらに $\varphi(r) = cr$ とし、$h(x) = x^\beta$, ここで $\beta = \log 2/\log(3/c)$, とすれば、$\varepsilon(x) = 0$, となるので定理が適用できる。従ってこの場合は φ-完全集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して H-dim$E \ge \log 2/\log(3/c)$ が成り立つ。

しかし、より一般の φ についてはこの結果では不十分な場合がある。そこで、次のような変形も有用である。

定理 5. **(X, ρ) を完備可分距離空間とする。関数 φ はある定数 $c > 0, \alpha > 1$ に対して $\varphi(r) \le cr^\alpha$ が成り立つと仮定する。ε の単調優関数 η で十分小さい $x_0 > 0$ に対して**

$$\int_0^{x_0} \frac{\eta(x)dx}{x\log(1/x)} < +\infty$$

が成り立つものが存在すると仮定すると、任意のφ-完全な閉集合Eについて $\mathcal{H}_h^\infty(E) > 0$ が成り立つ。さらに、もし δ の単調優関数 ω で十分小さい $x_0 > 0$ について

$$\int_0^{x_0} \frac{\omega(x)dx}{x\log(1/x)} < +\infty,$$

を満たすものが存在するとき、φ-完全なコンパクト集合 $E \subset \mathbb{R}$ で $0 < \mathcal{H}_h^\infty(E) \le \mathcal{H}_h(E) < +\infty$ を満たすものが構成できる。

References

1. O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Lund: Diss. **118s** (1935).
2. S. Kametani, *On Hausdorff's measures and generalized capacities with some of their applications to the theory of functions*, Jap. J. Math. **19** (1945), 217–257.
3. Ch. Pommerenke, *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*, Arch. Math. **32** (1979), 192–199.
4. T. Sugawa, *Various domain constants related to uniform perfectness*, Complex Variables Theory Appl. **36** (1998), 311–345.

E-mail address: sugawa@math.sci.hiroshima-u.ac.jp