

ON LIPSCHITZ CONTINUITY OF QUASICONFORMAL MAPPINGS

Vladimir Gutlyanskiĭ

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, NAS of Ukraine

須川 敏幸

広島大学大学院理学研究科

K -擬等角写像 f が局所的には $(1/K)$ -Hölder 連続であることはよく知られている。これは、いわば歪曲度関数

$$K_f(z) = \frac{1 + |\mu_f(z)|}{1 - |\mu_f(z)|}$$

の L^∞ -ノルムによる評価である。ここに、 $\mu_f = \bar{\partial}f/\partial f$ は f の Belrami 係数とする。もし、この K_f の L^p -ノルムによる評価が与えられれば、このような結果の精密化と言えるであろう。ここではそのような評価を実際に与え、さらにそれを用いて擬等角写像がある点において Lipschitz 連続になるための十分条件を与える。

局所的な話なので、以下では $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ を単位円板とし、 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を K -擬等角埋め込みで $f(0) = 0$ と正規化されていると仮定する。(注意：従って、 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ は全射とは限らないが、Riemann の写像定理と Schwarz の補題を用いれば全射であることを仮定してもそれほど一般性を失わない。) まず K_f の円環上での平均と言える

$$P_f(r, R) = \frac{1}{2\pi \log(R/r)} \iint_{r < |z| < R} \frac{K_f(z)}{|z|^2} dx dy, \quad 0 < r < R \leq 1$$

を考える。 $1 \leq P_f(r, R) \leq K$ であることに注意されたい。

定理 1. $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を正規化された K -擬等角埋め込みとすると、

$$|f(z)| \leq C \left(\frac{|z|}{R} \right)^{1/P_f(|z|, R)}, \quad |z| < R$$

が $R \leq 1$ に対して成り立つ。ここに C は 64 以下の絶対定数である。

次に、 $K_f - 1$ の円板上の平均値を定義する。

$$\omega_f(t) = \frac{1}{\pi t^2} \iint_{|z| < t} (K_f(z) - 1) dx dy, \quad 0 < t \leq 1.$$

従って $0 \leq \omega_f(t) \leq K - 1$ が任意の t について成り立つ。これについて、次の評価が成立する。

定理 2. $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を正規化された K -擬等角埋め込みとすると、

$$|f(z)| \leq C(K) |z| \exp \left(\int_{|z|}^1 \frac{\omega_f(t)}{t} dt \right), \quad 0 < |z| < 1$$

が成り立つ。ここに $C(K)$ は K にのみ依存する定数である。

これより直ちに次の系が得られる。

系 3. ω_f が Dini 条件を満たせば、上の f は原点において Lipschitz 連続である。

上で述べた主張は、実は K_f の代わりに次の

$$D_{f,0}(z) = \frac{|1 - \mu_f(z) \frac{\bar{z}}{z}|^2}{1 - |\mu_f(z)|^2}$$

を考えても同様に成り立つことが分かるが、詳細については [1] を見られたい。

REFERENCES

- [1] GUTLYANSKIĬ, V. and SUGAWA, T. On Lipschitz Continuity of Quasiconformal Mappings, *Report. Univ. Jyväskylä*, **83** (2001), 91–108.