A MAXIMAL OPERATOR ASSOACIATED WITH DIEUDONNÉ'S LEMMA

須川 敏幸
広島大学大学院理学研究科

本講演では Yong Chan Kim 氏との共同研究 [3] の一部分について解説を行う．この論文の主結果は多分に技術的であるが，ここで述べるテクニックについては普遍的なアイデアも含まれていると期待される．

まず標題にある Dieudonné の補題 (cf. [2, p. 198]) とは次のように述べられる．

定理 1 (Dieudonné [1]). **z_0, w_0 を単位円板内の与えられた点で，$|w_0| \le |z_0| \neq 0$ を満たすものとする．$\mathcal{F}$ を単位円板上の正則函数 ω で，$|\omega| < 1, \omega(0) = 0, \omega(z_0) = w_0$ を満たすもの全体のなす集合とする．このとき，集合 $\{\omega'(z_0) : \omega \in \mathcal{F}\}$ は w_0/z_0 を中心とし，$(|z_0|^2 - |w_0|^2)/|z_0|(1-|z_0|^2)$ を半径とする閉円板である．さらに，この円板の境界点には唯一の $\mathcal{F}$ の元が対応する．**

特に $\omega \in \mathcal{F}$ に対しては

$$|\omega'(z_0)| \le \left|\frac{w_0}{z_0}\right| + \frac{|z_0|^2 - |w_0|^2}{|z_0|(1-|z_0|^2)} = K(|z_0|, |w_0|)$$

が成り立つ．ここで，$0 \le s \le r < 1$ に対して

$$K(r,s) = \frac{s}{r} + \frac{r^2 - s^2}{r(1-r^2)} = \frac{s(1-r^2) + r^2 - s^2}{r(1-r^2)}$$

と置いた．ただし，$K(r,r) = 1$が常に成り立つことに注意して，$K(0,0) = 1$としておく．

$C([0,1))$ を区間 $[0,1)$ 上の（複素数値）連続函数の全体とし，その元 F に対して

$$\hat{F}(r) = \max_{0 \le s \le r} K(r,s)|F(s)|, \quad 0 \le r < 1,$$

と定義する．すると明らかに $\hat{F} \in C([0,1))$ である．$F \mapsto \hat{F}$ によって定義される写像 $C([0,1)) \to C([0,1))$ を K に付随する最大値作用素と呼ぶことにする．実はこの作用素は，$C([0,1))$ 上で定義される次の Bloch 型ノルムに関して著しい性質を持っていることが分かる：

$$\|F\| = \sup_{0 \le r < 1} (1-r^2)|F(r)|.$$

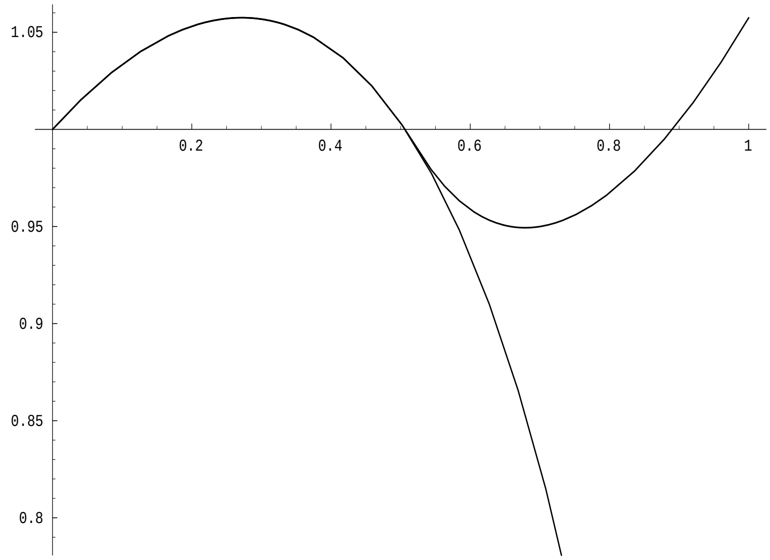
まず，

$$(1-r^2)|F(r)| \le (1-r^2)\hat{F}(r) \le \max_{0 \le s \le r} (1-s^2)|F(s)|$$

が $0 \le r < 1$ について成り立つことが容易に分かる．従って，特に $\|\hat{F}\| = \|F\|$ である．

次にノルム $\|F\|$ の定義の上限が，ある $r_0 \in [0,1)$ において達成されると仮定しよう．すると，上の不等式から $(1-r_0^2)\hat{F}(r_0) = \|F\|$ であることが分かる．実は函数 $(1-r^2)\hat{F}(r)$ は $r \to 1$ のとき，もう一度この値 $\|F\|$ に近づくことが分かる．例として函数 $F(r) =$

$(1-Ar)/(1-Br)=\varphi_{A,B}(r), A=0.7, B=-0.3,$ に対する $(1-r^2)F(r)$ のグラフ（下）と $(1-r^2)\hat{F}(r)$ のグラフ（上）を図示した.



定理 2. **任意の** $F \in C([0,1))$ **について次が成り立つ：**

$$\|F\| = \lim_{r\to 1-}(1-r^2)\hat{F}(r).$$

任意の $F, G \in C([0,1))$ に対して $(F+G)^\wedge \leq \hat{F}+\hat{G}$ が成り立つのは定義から明らかであるが，この定理から特に次の系を得る.

系 3.

$$\|F\| + \|G\| = \|\hat{F}| + \|\hat{G}\| = \|\hat{F}+\hat{G}\|.$$

この作用素の応用については，講演時に簡単に述べることにしたい.

References

1. J. Dieudonné, *Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornée d'une variable complexe*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **48** (1931), 247–358.
2. P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, 1983.
3. Y. C. Kim and T. Sugawa, *Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions*, Preprint (2004).