A CONFORMALLY INVARIANT METRIC ON RIEMANN SURFACES ASSOCIATED WITH INTEGRABLE HOLOMORPHIC QUADRATIC DIFFERENTIALS

須川 敏幸　　京都大学・理学部

この講演では可積分正則 2 次微分の空間から定まる等角不変計量を定義し、その計量の持つ性質について概観する。

まず、R を任意のリーマン面として $A(R)$ を R 上の可積分正則 2 次微分全体のなす複素バナッハ空間とし、

$$A_0(R) = \{\$\varphi \in A(R); \|\varphi\|_{A(R)} := \iint_R |\varphi| = \iint_R |\varphi(z)| dxdy \le \pi\}$$

と定める。局所座標を固定した上で、

$$q_R(z) = \sup_{\varphi \in A_0(R)} |\varphi(z)|^{1/2}$$

と定めれば、$q_R(z)|dz|$ は R 上の擬計量となる。より詳しくは、$A(R)$ が正の次元を持つ（つまり R が自明でない複素構造の変形を許す）ならば、q_R は実際に計量となり、それ以外の場合は恒等的に 0 になる。リーマン面 R について $A(R) = 0$ となる場合を例外型、そうでない場合を一般型と呼ぶことにする。

極値的な二次微分について次のことが言える。

定理 1. **R を一般型リーマン面とし、その上の局所座標 z を一つ固定する。$z_0 = z(p_0)$ とすると、これに対してある $\varphi_0 \in A_0(R)$ が一意的に存在して**

$$q_R(z_0)^2 = \varphi_0(z_0)$$

を満たす。しかもこの φ_0 は次の再生公式を満たす：

$$\psi(z_0) = \frac{q_R(z_0)^2}{\pi} \iint_R \frac{|\varphi_0|}{\varphi_0} \psi \quad (\forall \psi \in A(R)).$$

逆にこの再生公式を満たす任意の φ_0 に対し、$\pi\varphi/\|\varphi\|_{A(R)}$ と正規化したものは上の極値問題の解になっている。

また、この計量について次の評価式が成立する。

補題 2.

$$\sqrt{\pi K_R(z,z)} \le q_R(z) \le h_R(z).$$

ただし、ここで K_R は R の Bergman 核、h_R は R の Hahn 計量とする。

以下では R は双曲的とする。$B(R)$ を R 上の双曲的有界な正則 2 次微分全体のなすバナッハ空間とし、そのノルムを $\|\varphi\|_{B(R)} = \sup \rho_R^{-2}|\varphi|$ によって定義する。ただし、ここに

$\rho_R = \rho_R(z)|dz|$ は R の双曲計量とする。そこで $\kappa(R) = \sup\{\|\varphi\|_{B(R)}; \varphi \in A_0(R)\}$ と定める。特に $A(R) \subset B(R) \iff \kappa(R) < +\infty$ であることに注意する。実は次のことが言える。

補題 3.

$$\kappa(R) = \sup_{p \in R} \left(\frac{q_R}{\rho_R}(p) \right)^2 .$$

従って、q_R/ρ_R は大域的な量 $\kappa(R)$ を局所化した量だと思うことが出来る。$\kappa(R)$ については松崎克彦氏 [1] による具体的評価が知られているが、q_R を詳しく解析することにより、それを再生することが出来る。

講演では、具体的な q_R の評価や、一様完全性との関連についても言及する予定である。

References

[1] Matsuzaki, K. The Petersson series for short geodesics, XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium (Joensuu, 1995), de Gruyter, Berlin (1997).