A REMARK ON AHLFORS' UNIVALENCE CRITERION AND ITS APPLICATION

須川 敏幸　　京都大学・理学部

Ahlfors はその有名な論文 [1] において普遍 Teichmüller 空間の Bers 埋め込みが空間 $B(\mathbb{D})$ において開集合であることを証明したが、Lehto は [4] においてその証明が実際にはより具体的に、quasidisk D に対する単葉性内半径 $\sigma(D)$ の次のような評価を含んでいることを指摘した。

$$\sigma(D) \geq 2 \inf_{z \in D'} \frac{|\bar{\partial}\lambda(z)| - |\partial\lambda(z)|}{|\lambda(z) - z|^2 \rho_D(z)^2},$$

ただしここで $\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は ∂D に関する擬鏡映 (qc reflection) で、∂D を除いては C^1 級であるものとする。単葉性内半径とは、D 上の非定数有理型函数 f が

$$\|S_f\|_{B(D)} = \sup_{z \in D} \rho_D(z)^{-2} |S_f(z)| \leq \sigma$$

を満たすならば f が D 上で単葉となるような定数 $\sigma \geq 0$ の最大値のことを言う。ここに ρ_D は D の双曲計量の密度とし、S_f は f の Schwarz 微分を表すとする。$\sigma(D)$ は、普遍 Teichmüller 空間の Bers 埋め込み $T(1) \subset B(\mathbb{D})$ において、D の Riemann 写像が表す点と $T(1)$ の境界との距離を表すとも考えられる。

しかしながら、この評価自体はそのような一般の quasidisk および擬鏡映に対して正しいことを示すのはそれほど易しいわけではない。実際、その後 Lehto は教科書 [5] において、この結果を D がある意味で星形に近い（正確には、$0 \in D$ として、さらに $rD (0 < r < 1)$ の形の領域の可算列で D が内部から埋め尽くされる）という仮定の下で上の不等式を証明している。また、最近では Betker [3] が与えられた Löwner chain に付随するような特別な擬鏡映ついて、同様の評価式を与えている。しかし、この不等式自体はより一般の状況の下で成り立つであろうということは誰しも疑わないであろう。実際に、次のことが証明できたので報告したい。

定理 1. **λ を quasidisk D の境界に関する擬鏡映とすれば、**

$$\sigma(D) \geq 2 \operatorname*{ess.inf}_{z \in D} \frac{|\bar{\partial}\lambda(z)| - |\partial\lambda(z)|}{|\lambda(z) - z|^2 \rho_D(z)^2}$$

が成り立つ。

証明には、Bers による近似定理 [2, Lemma 1] を本質的に用いる他、擬正則写像に関する鏡像原理、quasidisk の Gehring による特徴付けなどを本質的に用いる。

講演では、この結果を用いて具体的に長方形がどのような単葉性内半径を持つかなど、いくつかの応用についても触れたい。

References

[1] Ahlfors, L. V. Quasiconformal reflections, *Acta Math.*, **109** (1963), 291–301.

[2] Bers, L. A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings, *Acta Math.*, **116** (1966), 113–134.

[3] Betker, T. Univalence criteria and Löwner chains, *Bull. London Math. Soc.*, **23** (1991), 563–567.

[4] Lehto, O. Remarks on Nehari's theorem about the Schwarzian derivative and schlicht functions, *J. Analyse Math.*, **36** (1979), 184–190.

[5] Lehto, O. *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag (1987).