

# リボングラフの双曲的 2-ORBIFOLD の分岐特異点解消への応用について

## ON AN APPLICATION OF RIBBON GRAPHS TO RESOLUTION OF THE BRANCH SINGULARITIES OF HYPERBOLIC 2-ORBIFOLDS

須川 敏幸 京都大学・理学部  
TOSHIYUKI SUGAWA KYOTO UNIVERSITY

### 1. 序

この講演ではリボングラフの分岐被覆面への応用について述べる。ここでリボングラフとは、通常のグラフに対してさらに各頂点に集まってくる辺の集合に順序の構造を持たせたもののことを言う。これはグラフの曲面への(局所的な)埋め込み方を指定しているのと同じことになっている。文献では、fat graph や、embedded graph(埋め込まれたグラフ)という名前で現れているかもしれない。例えば [4] や [5] などをご覧になって頂ければ正確な定義や使用方法についての一端を知ることが出来るであろう。最近ではこの概念は量子群や knot theory などでも用いられているようであるが、筆者の専門外なので詳しいことは分からない。なお、以下で述べる実際の適用例を見て頂ければお分かりになるように、ここでのリボングラフは(生成元による標識付きの)群の Cayley グラフと酷似している(Cayley グラフの双曲多角形の貼り合わせへの応用については、例えば [1] を参照のこと)。このノートでは、さらに Cayley グラフの頂点に円順序の構造を持たせて議論をするところが強いて言えば違いではないかと思われる。

分岐被覆面とリボングラフとが密接に関係していることは、次のようなことを考えてみればすぐに分かる。例えば、 $\pi : U \rightarrow R$  をリーマン面  $U$  から  $R$  への(Galois とは限らない)分岐被覆写像とする。 $R$  の分岐点を全て適当な 1 本の曲線  $\alpha$  で、高々 1 つの分岐点でしか自己交叉を持たないようなもので結んで、それによって切り開いた面  $D$  が単連結領域にできたとしよう。その曲線の分岐点を除いた部分の各連結成分をその曲線  $\alpha$  の辺と呼ぶことにする。するとその逆像  $\pi^{-1}(D)$  は  $\pi$  が  $D$  の上では不分岐被覆だから単連結領域  $D_j (j \in J)$  の disjoint union となり(この場合  $\#J$  は  $\pi$  の葉数となる)その各々は  $\pi$  により  $D$  に双正則に写る。そこでそれらの連結成分達 ( $\cong J$ ) を頂点集合として頂点の組  $j, k \in J (j \neq k)$  に対して  $D_j$  と  $D_k$  が共有している  $\alpha$  の辺の個数の分だけ、辺で結ぶことによりグラフの構造を得る。(  $j = k$  の場合には自分自身が共有する辺の個数の分だけ、ループをその頂点に取り付ける。) さらに、一つの頂点に着目するとその点から出発する辺達には面の向き付けに従って、ある順序が(回転の自由度を除いて)定まっている。従って、このようなグラフは自然にリボングラフの構造を持つ。このような離散化された対象を調べることにより我々は  $\pi : U \rightarrow R$  の被覆の様子を研究することができる。このような

---

Date: RIMS, 12 December, 1998.

考え方は「リボングラフ」という言葉こそ出てこないが、例えば [3] に見ることが出来る。筆者の浅学では分からないが、おそらく基本的なアイデアの出所は少なくとも F. Klein 辺りにまでさかのぼることができるであろう。

例えば、次のような応用が考えられる。

1. 分岐の次数と分岐データを与えた時のそのような分岐を許容する被覆の存在・非存在を調べる、
2. 分岐点解消被覆の具体的構成、
3. 抽象 Galois 群が与えられた時に、対応する Galois 被覆を具体的に構成する。

この講演では主に 3 番目の応用について取り上げる。もう少し正確に問題を定式化しておこう。

$X$  を双曲的 2-orbifold とする。つまり、ある (torsion を許す) Fuchs 群  $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  に対して  $X = \mathbb{H}/\Gamma$  と書いているとする。ここで  $X$  は torsion 元に対する分岐データを具有しているものと理解して頂きたい。つまり、抽象的には  $X$  はその下部構造にリーマン面の構造 (これを  $R_X$  と書く) を持ち、さらにその上に分岐因子 (branch divisor) が与えられたようなものだと理解してもよい。(その場合は、双曲構造が入るための条件が必要であり、それは通常は  $X$  が解析的有限でないか、または orbifold としての Euler 数が負という条件で記述される。双曲的 orbifold の形式的定義などもう少し詳しいことについては [6] をご覧頂きたい。)

さて、ここで  $X$  に対する分岐特異点解消問題を考えよう。つまり、orbifold としての不分岐被覆  $Y \rightarrow X$  で  $Y$  が分岐を持たないようなもの (つまり  $Y$  は smooth) を構成したいのだが、このような被覆でどれくらい次数を低くすることができるかを考えてみたい。すなわち、次のような数を考える。

$$\begin{aligned} \alpha(X) &= \min\{\deg(f); \exists f : Y \rightarrow X \text{ 不分岐被覆 s.t. } Y: \text{smooth}\} \\ &= \alpha(\Gamma) = \min\{[\Gamma : K]; K < \Gamma \text{ は torsion-free}\}, \\ \beta(X) &= \min\{\deg(f); \exists f : Y \rightarrow X \text{ 不分岐 Galois 被覆 s.t. } Y: \text{smooth}\} \\ &= \beta(\Gamma) = \min\{[\Gamma : N]; N \triangleleft \Gamma \text{ は torsion-free}\}. \end{aligned}$$

Selberg の補題から  $X$  が有限型ならば  $\alpha(X) < \infty$  であることが分かるが、より強く次のことが成り立つことが知られている。

**定理 1** (Edmonds-Ewing-Kulkarni [2]).  $\Gamma$  を  $(g; \nu_1, \dots, \nu_k; n; m)$  を signature に持つ有限生成 Fuchs 群とする。自然数  $N$  に対して  $\Gamma$  の torsion-free な部分群で指数  $N$  のものが存在するための必要十分条件は  $N$  が  $2^\varepsilon \nu$  で割り切れることである。従って特に  $\alpha(\Gamma) = 2^\varepsilon \nu$  が成り立つ。ここに  $\nu = \text{LCM}(\nu_1, \dots, \nu_k)$  で、 $\varepsilon$  は  $n + m = 0$  かつ  $\nu$  が偶数だが  $\nu/\nu_j$  が奇数になるような  $j$  は奇数個であるときには値 1 を取りそれ以外の場合には値 0 とする。

この定理で  $\varepsilon = 1$  なる場合を奇数型と呼ぶことにする。なお、ここで上の signature で  $n$  は穿孔 (puncture) の個数を表し、 $m$  は孔 (hole) の個数を表すものとする。これは、放物元と双曲元の違いに相当する。

これは非常に良い結果であるが、 $\beta(X) = \beta(\Gamma)$  に関してはここまで完全な結果は知られていない。次の部分的結果は [6] に述べられているが半分以上は well-known であろうと思われる。

定理 2.  $\Gamma$  を  $(g; \nu_1, \nu_2, \dots; n; m)$  を signature とする任意の Fuchs 群  $\Gamma$  に対し、対応する orbifold を  $X = \mathbb{H}/\Gamma$  とする。また  $\nu = \text{LCM}(\nu_1, \nu_2, \dots)$  とし、これが有限であると仮定する。

1. 分岐データが  $\nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_2, \dots$  のような 2 つずつペアになっているような形をしている時は torsion-free な正規部分群  $\Gamma_1$  で  $\Gamma/\Gamma_1 \cong \mathbb{Z}_\nu$  となるものが取れる。従ってこの場合は  $\beta(\Gamma) = \nu$  が成り立つ。
2.  $g > 0$  または  $g = 0$  だが  $R_X$  が単連結でないときは  $\beta(\Gamma) \leq 2\nu^2$ 。
3.  $\Gamma$  が有限生成で  $g + n + m > 0$  とする。  $n + m > 0$  の時は  $\beta(\Gamma) = \nu$  であり  $n + m = 0$  の場合は  $\beta(\Gamma) \leq 2^{\varepsilon+1}\nu$  が成り立つ。ここに  $\varepsilon$  は  $\Gamma$  が奇数型の時 1 でそうでないときは 0 を表すものとする。
4.  $R_X$  がリーマン球面と同相の時、  $p$  を  $\nu$  を割り切らない任意の素数とし、  $(\mathbb{Z}_\nu)^\times$  における  $p \pmod{\nu}$  の位数を  $t$  として  $q = p^t$  とおく。このとき torsion-free な正規部分群  $\Gamma_1$  で  $\Gamma/\Gamma_1$  が  $\text{SL}(2, \mathbb{F}_q)$  の部分群に同型であるようなものが存在する。従って特に  $\beta(\Gamma) \leq \#\text{SL}(2, \mathbb{F}_q) = q(q^2 - 1)$  が成り立つ。

この定理において、主張 3, 4 を示すのに用いた議論は純粋に代数的なものであった。簡単のために  $\Gamma$  は有限生成として signature を  $(g; \nu_1, \dots, \nu_k; n; m)$  とする。するとこのような signature を持つ Fuchs 群  $\Gamma$  は代数的には次のような標準的な表示を持つことが知られているが：

$$\Gamma = \langle \alpha_j, \beta_j, \gamma_l \ (1 \leq j \leq g, 1 \leq l \leq k+n+m) \mid \prod [\alpha_j, \beta_j] \prod \gamma_l = 1, \gamma_l^{\nu_l} = 1 \ (1 \leq l \leq k) \rangle$$

この群からある有限群  $G$  への全射準同型  $\phi: \Gamma \rightarrow G$  で  $\text{ord } \gamma_l = \text{ord}(\phi(\gamma_l))$  が任意の  $1 \leq l \leq k$  に対して成り立つようなものを構成することにより、torsion-free な正規部分群  $N = \Gamma/\text{Ker } \phi$  を得たのであった。つまり、ある元  $a_j, b_j, c_l$  ( $j = 1, \dots, g, l = 1, \dots, k+n+m$ ) で生成される群  $G$  でこれらが関係式

$$\prod_{j=1}^g [a_j, b_j] \prod_{l=1}^{k+n+m} c_l = 1$$

及び条件  $\text{ord } c_l = \nu_l$  ( $l = 1, \dots, k$ ) を満たすようなものを構成するだけで良かった。しかし、これでは“幾何学的証明”と呼ぶのには気が引けるので、もう少し幾何学的な構成をしたい、というのがこのノートの目的である。

## 2. リボングラフの構成

まずリボングラフとは何かについて簡単に説明しておく。リボングラフとは、通常の (有限葉の) グラフに対してさらに各頂点において集まる辺に円順序の構造を付与したものである。より形式的な (一つの) 定式化については以下で説明する。

この節では簡単のために有限生成 Fuchs 群  $\Gamma$  で signature  $(g; \nu_1, \dots, \nu_k)$  を持つものを考える。ただし、ここで  $2 \leq \nu_l \leq \infty$  として、 $\nu = \infty$  となる点は穿孔 (puncture) とみなすことにする。(従って今は孔 (hole) を持つ場合は考えないことにする。)

また、有限群  $G$  で生成元  $a_j, b_j, c_l$  ( $j = 1, \dots, g, l = 1, \dots, k$ ) を持ち、これらが関係式

$$(2.1) \quad \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] \prod_{l=1}^k \gamma_l = 1$$

及び条件  $\nu_l < \infty \Rightarrow \text{ord } c_l = \nu_l$  を満たすようなものが既に与えられているとしよう。

そこで  $X = \mathbb{H}/\Gamma$  の上の分岐特異点解消 Galois 被覆でその Galois 群が  $G$  になるようなものを構成したい。元々分岐がなければ構成の意味はないので、 $k > 0$  であると仮定し、 $\nu_k < \infty$  としておいてよい。さて、 $\nu_k$  に対応する分岐点  $x_0$  を基点とする  $X$  の基本群の元  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_l (1 \leq j \leq g, 1 \leq l < k)$  で前節におけるような  $\Gamma$  の標準生成系に対応するものを取り、それらで  $X$  を単連結に切り開く。切り開くときに用いるこれらの元を代表する曲線は  $x_0$  以外では交わらない単純閉測地線分を取っておける。これらで切り開いた面を  $D$  とすると、これの  $\mathbb{H}$  への持ち上げは  $4g + 2k$  角形で辺を反時計回りに順に並べて、 $\alpha_1^+, \beta_1^+, \alpha_1^-, \beta_1^-, \dots, \beta_g^-, \gamma_2^+, \gamma_2^-, \dots, \gamma_k^+, \gamma_k^-$  とする。(ただし、各々の辺は正の向き、すなわち向きに沿って進むときに  $D$  を左側に見るような向きを入れておく。)すると各  $1 \leq l < k$  に対して  $\gamma_l^+, \gamma_l^-$  のなす角は仮定から  $2\pi/\nu_l$  となっており、残りの部分のなす角を全て足すと  $2\pi/\nu_k$  となっていることに注意しておく。(従って、以下の方法はこのような“双曲多角形”の  $\#G$  個のコピーをしかるべき手順によって貼り合わせれば欲しかった上にある面を与えてくれる。)

さて、今からリボングラフを構成していく。まず頂点集合は順当に  $G$  を選んでおく。辺としてはまず各頂点に対して  $2M$  本用意しておく。ただしここで  $M = 2g + k - 1$  としておく。(正確にはまだこれはつながる前の状態だから、辺の半分で“半辺 (half-edge)”の集合とでも呼んでおこう。)円順序の構造も欲しいわけだから、半辺としてはあらかじめ  $\mathbb{Z}_M := \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$  という Abel 群としての代数的構造を入れておくのが便利である。便宜上、 $[i] (1 \leq i \leq M)$  に対しては  $\alpha_1^+$  から順に双曲多角形の辺を反時計回りに並べて対応させることにしておこう。あとは、これら“半辺”が2つずつ集まって辺 (edge) になるからにはどの頂点とつながかを指定してやる必要がある。つまり、 $\mathcal{P} := G \times \mathbb{Z}_M$  として写像  $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  を各半辺  $p \in \mathcal{P}$  に対してもう一方の半辺を対応させるものとしよう。すると  $F \circ F = \text{id}$  である必要がある。逆にこのようなものが与えられればグラフの構造が決定される。かなり天下りの的ではあるが、 $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  を次のように定義してしまおう。

$$\begin{aligned} F(h, 4j - 3) &= (ha_j, 4j - 1), \\ F(h, 4j - 2) &= (hb_j^{-1}, 4j), \\ F(h, 4j - 1) &= (ha_j^{-1}, 4j - 3), \\ F(h, 4j) &= (hb_j, 4j - 2), \\ F(h, 4g + 2l - 1) &= (hc_l, 4g + 2l), \\ F(h, 4g + 2l) &= (hc_l^{-1}, 4g + 2l - 1), \end{aligned}$$

ただし  $h \in G, j = 1, \dots, g, l = 1, \dots, k - 1$ .

これにより  $G$  にリボングラフの構造が与えられた。 $F$  は具体的には双曲多角形の辺を他の双曲多角形のどこの部分と貼り合わせるかを具体的に指定する函数である。(対応する辺の長さは作り方から同じになっていることに注意せよ。)

あとはこれによって貼り合わされたものが smooth な orbifold, すなわちの Riemann 面の構造を持つことを示せばよい。これを言うには、貼り合わせて得られた面が“角張らず”さらに“分岐もしない”ことを示せばよい。例えば一つの元  $h \in G$  に対応する双曲多角形  $D_h$  に着目して、その双曲多角形とし

ての頂点の一つを固定して考える。そこで  $i \in \mathbb{Z}_M$  に対応する辺と  $i+1$  に対応する辺との共通の端点となっているような頂点を考えよう。 $(h, i)$  に対して  $f(h, i) := F(h, i+1)$  はこの頂点に集まってくる双曲多角形のうち、 $D_h$  の左隣に位置する双曲多角形の（この頂点に対して右側の）辺を対応させている。従って、 $f$  の逐次合成に関する  $(h, i)$  の周期がこの頂点の周りに集まってきている双曲多角形の個数を表すことになるわけで、対応する双曲多角形の角度の和が（穿孔に対応する頂点でない限り）ちょうど  $2\pi$  になっていれば、“角”も“分岐”もないことが示されるわけである。

そこで計算してみると  $f$  によって半辺  $(h, 4g+2l-1)$  は半辺  $(hc_l, 4g+2l-1)$  に遷る。従ってこの周期はちょうど  $c_l$  の位数と等しくなっており角の総和は上で注意したことから、 $\nu_l < \infty$  の時はちょうど  $2\pi$  で、 $\nu_l = \infty$  なら  $0$  である。

一方  $(h, 0)$  は  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  によって次のように遷っていく。

$$\begin{aligned} (h, 0) &\mapsto (ha_1, 3) \mapsto (ha_1b_1, 2) \mapsto (ha_1b_1a_1^{-1}, 1) \mapsto (ha_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}, 4) \\ &= (h[a_1, b_1], 4) \mapsto (h[a_1, b_1]a_2, 7) \mapsto \cdots \mapsto (h \prod_{j=1}^g [a_j, b_j], 4g) \\ &\mapsto (h \prod_{j=1}^g [a_j, b_j]c_1, 4g+2) \mapsto \cdots \mapsto (h \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] \prod_{l=1}^{k-1} c_l, 4g+2N) = (hc_k^{-1}, 0). \end{aligned}$$

従ってその周期は  $(4g+k-1)\nu_k$  であり、角度の総和は上の場合の残りの部分の  $\nu_k$  倍となるから、やはりちょうど  $2\pi$  となっている。これらの考察からこの規則によって貼り合わせた面は smooth な orbifold (リーマン面)  $Y$  になることが分かった。これから自然に誘導される被覆写像  $Y \rightarrow X$  は  $G$  を Galois 群とする orbifold としての不分岐 Galois 被覆になっているわけである。

上で述べた函数  $F$  が与えられた双曲多角形の貼り合わせの規則を定めているわけだから、群  $G$  の構造が分かりさえすれば幾何学的にどのようなつながっているかなどは構成の仕方から原理的には分かるはずである。もちろん、結果として得られるリーマン面  $Y$  の位相的な性質だけならこのような構成法によらなくても Riemann-Hurwitz の公式を使えば簡単に得られることを最後に注意しておこう。

## REFERENCES

- [1] P. Buser. *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Birkhäuser, 1992.
- [2] A. L. Edmonds, J. H. Ewing, and R. S. Kulkarni. Torsion free subgroups of Fuchsian groups and tessellations of surfaces. *Invent. Math.*, Vol. 69, pp. 331–346, 1982.
- [3] G. A. Jones and D. Singerman. Theory of maps on orientable surfaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, Vol. 37, pp. 273–307, 1978.
- [4] R. C. Penner. Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces. *J. Diff. Geom.*, Vol. 27, pp. 35–53, 1988.
- [5] R. C. Penner. Weil-Petersson volumes. *J. Diff. Geom.*, Vol. 35, pp. 559–608, 1992.
- [6] T. Sugawa. A geometric proof of Selberg’s lemma for Fuchsian groups. *数理解析研究所講究録*, Vol. 1065, pp. 1–13, 1998.