SCHWARZ 微分のノルム評価に関する若干の注意

京大・理　　須川敏幸

1992.1.17

東工大にて

§0. Introduction.

D を平面領域で、単位円板 U を正則普遍被覆面に持つものとする。（すなわち、$\mathbb{C}\setminus D$ が２点以上からなるとする。）　すると、単位円板 U 上の Poincaré 計量（密度）$\rho_U(z)=\frac{1}{1-|z|^2}$ は自然に D 上の Poincaré 計量に射影される。つまり、$p: U\to D$ を正則普遍被覆写像とすると、

$$\rho_D(p(z))|p'(z)|=\rho_U(z)=\frac{1}{1-|z|^2}$$

を満たす D 上の函数 ρ_D が p の取り方によらず定まる。

そこで D 上の正則函数 φ に対して、次のようにノルムを定義する：

$$\|\varphi\|_D=\sup_{z\in D}|\varphi(z)|\rho_D(z)^{-2}.$$

さて、D 上の局所単葉有理型函数 f の Schwarz 微分 $S_f=(\frac{f''}{f'})'-\frac{1}{2}(\frac{f''}{f'})^2$ のノルムと f の（局所）単葉性とは深いつながりがあることが知られている。従って、この f の Schwarz 微分のノルムを評価が重要になることが多い。しかし、Schwarz 微分はその形から想像されるように、実際に評価するのは並大抵ではない。そこで、この講演では実際に微分することなく、函数 f の比較的大域的な性質から Schwarz 微分の評価をすることを試みる。このアブストラクトには書かないが、時間が余ればこの応用例を紹介する予定である。

§1. 基本的結果**.**

この節では以下で必要な基本的な結果についてまとめておく。

ここでは $\varDelta$ は平面内の任意の円板とする。

また、$K=\frac{1-k}{1+k}$ $(0\le k<1)$ として、普通は K-擬等角写像と呼ぶべきところを、ここでは便宜上 k-擬等角写像と呼ぶことにする。すなわち、f が k-擬等角写像であるとは、ＡＣＬに属する平面領域間の同相写像で、Beltrami 係数 μ_f（i.e., $f_{\bar z}=\mu_f f_z$ a.e.）に対して $\|\mu_f\|\le k$ が成り立つものとする。

Theorem A (Nehari-Kraus [6]**).**　　$\varDelta$ 上の単葉函数 f に対して、$\|S_f\|_\varDelta\le 6$ が成り立つ。

Theorem B (Ahlfors-Weill [1]). $\varDelta$ 上の局所単葉有理型函数 f に対して、$\|S_f\|_\varDelta < 2$ が成り立つならば、この f は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の $\frac{\|S_f\|_\varDelta}{2}$-擬等角写像に拡張される。

さらに、いわゆる Bers 射影の正則性に注意すれば、上の Nehari-Kraus の定理 (Theorem A) と Schwarz の補題（の Banach 空間版）から次の定理が容易に従う。

Theorem C. $\varDelta$ 上の単葉函数 f が $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の k-擬等角写像に拡張されるならば、実は $\|S_f\|_\varDelta \le 6k$ が成り立つ。

§2. ノルム評価の基本原理.

ノルム $\|\varphi\|_D$ の評価は領域の形がいやらしいと、相当厄介そうにも思えるが、実はそれほど厄介ではない。実はその領域に含まれるある種の円板に制限して考えれば十分なのである。そのことを定量化してここでは述べることにする。

まずその前に必要となる記号を導入しておく。 $A \ge 1$ を定数とし、

$$\mathcal{D}_A(D) = \{B(z_0, r); z_0 \in D, r > 0, B(z_0, Ar) \subset D\}$$

と定める。ただし、ここに $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ である。また、D 上の正則函数 φ に対して新たに以下のようなノルムを定義する。

$$\|\varphi\|_D^{(A)} = \sup_{\varDelta \in \mathcal{D}_A(D)} \|\varphi\|_\varDelta,$$

$$\|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}} = \sup_{z \in D} |\varphi(z)| \mathrm{dist}(z, \partial D)^2.$$

まず、もっとも基本的なこととして、$D_1 \subset D_2$ ならば、Schwarz-Pick の補題から

$$\|\varphi\|_{D_1} \le \|\varphi\|_{D_2}$$

が成り立つことに注意しておく。これは以下では特にコメントなしに用いられる基本原理である。

まず、これらのノルムについては容易に次のことが分かる。

Lemma 1. $\|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}} \le A^2 \|\varphi\|_D^{(A)} \le \|\varphi\|_D$

さらに、D が単連結の時は Koebe の $\frac{1}{4}$ 定理から

$$\rho_D(z)^{-1} \le 4\mathrm{dist}(z, \partial D)$$

であるから、次の補題が得られる。

Lemma 2. D が単連結とすると、$\|\varphi\|_D \le 16 \|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}}$ が成り立つ。

これらを単純に組み合わせることにより、次の結果を得る。

Theorem 1. $D \subset \mathbb{C}$ を双曲的単連結領域とする。$A \le 1$ を定数とし、$f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ を局所単葉有理型函数とする。

$\varDelta \in \mathcal{D}_A(D)$ に対し $f|_\varDelta$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の k-擬等角写像に拡張されるならば、実は $\|S_f\|_D \le 96A^2k$ である。

Proof. $\varDelta \in \mathcal{D}_A(D)$ に対し Theorem C より、$\|S_f\|_\varDelta \le 6k$、従って $\|S_f\|_D^{(A)} \le 6k$ が成り立つ。これより、$\|S_f\|_D \le 16\|S_f\|_D^{\mathrm{dist}} \le 16A^2\|S_f\|_D^{(A)} \le 96A^2k$. □

実はこれとほぼ逆のことが今度は一般の領域について言える。

Theorem 2. D を双曲的平面領域とする。$B > 0,\ 0 < k < 1$ を定数とする。局所単葉有理型写像 $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ が $\|S_f\|_D \le B$ を満たすとする。　このとき、$B \le 2kA^2$ を満たす定数 $A \ge 1$ を取れば、任意の $\Delta \in \mathcal{D}_A(D)$ に対して $f|_\Delta$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の k-擬等角写像に拡張できる。

Proof. $\Delta \in \mathcal{D}_A(D)$ とすれば $\|S_f\|_\Delta \le \|S_f\|_D^{(A)} \le A^{-2}\|S_f\|_D \le A^{-2}B \le 2k$ だから、Theorem B より $f|_\Delta$ は k-擬等角写像に拡張できる。 □

§3. 特定の quasidisk に関するノルム評価について.

ここでは擬等角写像も絡めたノルム評価の一例について述べることにする。

D, D' は双曲的平面領域とし、$w : D \to D'$ を k-擬等角同相写像とする。$(0 \le k < 1)$　まず、次の補題が標準的な modulus（同じことだが、極値的長さ）の評価から従う。

Lemma 3. 任意の $A > 1$ に対して、k と A にのみ依存する定数 $A' = A'(k, A)$ が存在して次のことが成り立つ：　任意の $\Delta' \in \mathcal{D}_{A'}(D')$ に対して、ある $\Delta \in \mathcal{D}_A(D)$ で $\Delta' \subset w(\Delta)$ を満たすものが存在する。

この補題から直ちに次の結果を得る。

Theorem 3. $w : D \to D'$ を双曲的平面領域間の k-擬等角同相写像とし、$A > 1$ を定数とすると、k, A にのみ依存する定数 $A' = A'(k, A)$ が存在して、$\|\varphi\|_{D'}^{(A')} \le \sup_{\Delta \in \mathcal{D}_A(D)} \|\varphi\|_{w(\Delta)}$ が成り立つ。

特に、D が単連結領域の場合、

$$\|\varphi\|_{D'} \le 16\|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}} \le 16{A'}^2\|\varphi\|_{D'}^{(A')} \le 16{A'}^2 \sup_{\Delta \in \mathcal{D}_A(D)} \|\varphi\|_{w(\Delta)}$$

の形の評価が得られる。

一方、逆の不等式は自明である：$\sup_{\Delta \in \mathcal{D}_A(D)} \|\varphi\|_{w(\Delta)} \le \|\varphi\|_{D'}$.

【参考文献】

[1]. [redacted]hlfors, L. V. and G. Weill, *A uniqueness theorem for Beltrami equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 975–978.

[2]. [redacted]stala, K. and F. W. Gehring, *Crickets, zippers, and the Bers universal Teichmüller space*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 675–687.

[3]. [redacted]eardon, A. F. and F. W. Gehring, *Schwarzian derivatives, the Poincaé metric and the kernel function*, Comment. Math. Helvetici **55** (1980), 50–64.

[4]. [redacted]ehring, F. W., *Univalent functions and the Schwarzian derivative*, Comment. Math. Helvetici **52** (1977), 561–572.

[5]. [redacted]amilton, D. H., *The closure of Teichmüller space*, J. Analyse Math. **55** (1990), 40–50.

[6]. [redacted]ehari, Z., *The Schwarzian derivative and schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 545–551.

[7]. [redacted]ugawa, T., *The Bers projection and the λ-lemma*, J. Math. Kyoto Univ. (to appear).