

稠密な開集合に対する BERS PROJECTION とその応用

須川敏幸 京大・理

Bers projection は Teichmüller 空間論において重要な役割を果たす写像であるが、ここではそれを一般の開集合についても考え、それによってもとの開集合の性質について調べることを目標とする。

まず、 D を境界が 2 点以上からなる複素平面 \mathbb{C} 内の開集合とする。(このような開集合を双曲的と呼ぶことにする。) $E = \mathbb{C} \setminus D$ として、 $L^\infty(E) = \{\nu \in L^\infty(\mathbb{C}); \nu = 0 \text{ on } D\}$, $M(E) = \{\mu \in L^\infty(E); \|\mu\| < 1\}$ と定める。また、 $\mu \in M(E)$ を Beltrami 係数に持つ (適当に正規化された) 擬等角写像を $w^\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ と書くことにすると、 $w = w^\mu$ は D 上では等角だから Schwarz 微分 $S_{w^\mu} = (\frac{w''}{w'})' - \frac{1}{2}(\frac{w''}{w'})^2$ が D 上定義され、しかも

$$S_{w^\mu} \in B_2(D) = \{\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}; \text{正則}, \|\varphi\|_D = \sup_{z \in D} |\varphi(z)| \rho_D(z)^{-2} < \infty\}$$

である (Beardon-Gehring [1])。ここで、 ρ_D は D (の各成分) 上での定曲率 -4 を持つ Poincaré density とする。 $\Phi(\mu) = \Phi_D(\mu) = S_{w^\mu}$ と書くことにし、 $\Phi : M(E) \rightarrow B_2(D)$ を D に対する Bers projection と呼ぶことにする。(通常 Bers projection は D が円板または半平面の場合である。) これに関して、次の性質は基本的である。

命題. *Bers projection* $\Phi : M(E) \rightarrow B_2(D)$ は有界正則写像で、特に 0 に於ける Gateau 微分 $d_0 : L^\infty(E) \rightarrow B_2(D)$ は次のように表せる。

$$d_0 \Phi[\nu](z) = -\frac{6}{\pi} \iint_E \frac{\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\xi d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta) \nu \in L^\infty(E)$$

この講演では外点を持たない開集合に対する Bers projection について得られた結果を紹介する。まず、

定理. \mathbb{C} に於いて稠密な双曲的開集合 D が高々有限個の連結成分からなるとき、これに対する *Bers projection* $\Phi : M(E) \rightarrow B_2(D)$ は単射である。特に、 D が連結の時、各点に於ける Φ の Gateau 微分は単射である。

この定理の一つの応用として次の系が容易に証明できる。

系 (Overholt[2]). D が *conformally rigid* な領域とすると、 \mathbb{C} に於ける補集合は面積 0 である。

また、この定理に於いて、一般に D の成分を無限にすることは出来ない。

例. C を区間 $(0, 1)$ に於ける粗な (すなわち、内点を持たない) コンパクト集合で 1 次元測度が正のものとする。 C をやはり測度が正の 2 つの可測な集合 C_1, C_2 に分け、定数 $k_1, k_2 \in (0, 1)$ を $k_1 m(C_1) = k_2 m(C_2)$ となるように取り、狭義単調増加の絶対連続函数 u を

$$u(x) = \int_0^x (1 + k_1 \chi_1(t) - k_2 \chi_2(t)) dt,$$

ただしここで χ_1, χ_2 はそれぞれ C_1, C_2 の特性函数とする。そこで、 $[x]$ は実数 x の整数部分として

$$F(x + iy) = [x] + u(x - [x]) + iy \quad \text{for } x + iy \in \mathbb{C}$$

と定めれば、 $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は $\frac{1+k}{1-k}$ -擬等角写像となる。ただしここに、 $k = \max\{\frac{k_1}{2+k_1}, \frac{k_2}{2-k_2}\}$ とする。一方作り方から明らかに、写像 F は稠密な開集合 $D = \{x + iy \in \mathbb{C}; x - [x] \in [0, 1) \setminus C\}$ の各連結成分に於いては実軸方向への平行移動であるが、*global* には平行移動ではない。従って、 μ を F の Beltrami 係数とすれば、 $\mu \in M(E) \setminus \{0\}$ ではあるが、 $\Phi(\mu) = 0$ である。従って、特に $\Phi : M(E) \rightarrow B_2(D)$ は単射ではない。

【参考文献】

- [1]. Earson, A. F. and F. W. Gehring, *Schwarzian derivatives, the Poincaré metric and the kernel function*, Comment. Math. Helvetici **55** (1980), 50–64.
- [2]. Overholt, M., *The area of the complement of a conformally rigid domain*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 448–450.
- [3]. Sugawa, T., *The Bers projection and the λ -lemma*, J. Math. Kyoto Univ. (to appear).