# 第2種有限生成 FUCHS 群の TEICHMÜLLER 空間と単葉函数の SCHWARZ 微分について

須川敏幸　　京大・理　　　　1992/07/24　於・富山大学

§**0.**　序.

この講演では第2種有限生成純双曲的 Fuchs 群（つまり compact bordered Riemann 面を一意化する Fuchs 群）$\Gamma$ の Teichmüller 空間 $T(\Gamma)$ と、単葉函数の Schwarz 微分で $\Gamma$-automorphic なもの全体 $S(\Gamma)$ のなす関係を軸に次のような話題に触れたい。

(1)　有理型写像の Schwarz 微分のノルムの大きさと、局所的な qc-拡張性との間の定量的関係

これについては、比較的広く認識されているようであるが、きちんと定式化された形ではあまり見かけないので、ここでこのことについてまとめておくことも意味あることと思われる。

(2)　$\Gamma$-不変な qc-surgery

ここでの qc-surgery という概念は、擬等角写像を用いて、所期の位相的性質を持つような等角写像を構成することを意味する。このテクニックは複素力学系や値分布理論などに於いても重要な役割を果たすと考えられる。この講演では、第2種 Fuchs 群 $\Gamma$ を保つような qc-surgery の方法について解説したい。

§**1.**　諸定義.

$D$ は Riemann 球面 $\widehat{\mathbf{C}}$ 内の双曲的部分領域（つまり、境界が3点以上からなるような部分領域）とする。また、$\rho_D(z)|dz|$ を定曲率 $-4$ を持つ Poincaré 計量とする。例えば $D=U=\{|z|<1\}$（単位円板）ならば $\rho_U(z)|dz|=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$ である。

次に $D$ 上の正則函数 $\varphi$ に対し、ノルム

$$\|\varphi\|_D=\sup_{z\in D}\rho_D(z)^{-2}|\varphi(z)|$$

と定め、このノルムが有限な正則函数全体のなす複素 Banach 空間を $B_2(D)$ で表す。

また、$D$ 上の非定数有理型函数 $f$ に対してその Schwarz 微分を

$$S_f(z)=\{f,z\}=\left(\frac{f''}{f'}\right)'(z)-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

により定義する。$S_f$ が正則というのがその点で $f$ が局所単葉ということと同値である。

この Schwarz 微分について次の Cayley の公式：

$$S_{g\circ f}=S_g\circ f\cdot(f')^2+S_g$$

が成り立つことに注意しておく。ここで次の定理が成り立つことに触れておく。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

定理 **1.1**（**Nehari, Beardon-Gehring [1]**）. $f$ を $D$ 上の単葉函数とすると $\|S_f\|_D \le 12$ である。特に $D$ が単位円板 $U$ の場合、$\|S_f\|_U \le 6$ となる。

これより、$S(D) = \{S_f; f$ は $D$ 上の単葉函数 $\}$ と置けば、$S(D) \subset B_2(D)$ であることが分かる。

さらに、今度は Klein 群 $G$ に対して $D \subset \Omega(G)$ を $G$-不変な領域として、

$$B_2(D,G) = \{\varphi \in B_2(D); (\varphi \circ g)(g')^2 = \varphi \quad \text{for all} \quad g \in G\}$$

と定義する。$B_2(D,G)$ は $B_2(D)$ の閉部分空間となるから、それ自身複素 Banach 空間とみなせる。

ここで特に単位円板 $U$ の場合について考え、$S = S(U)$ と略記することにする。

$$T = \{S_f \in S; f(U) \text{ は quasidisk}\}$$

$$J = \{S_f \in S; f(U) \text{ は Jordan 領域 }\}$$

とし、$\Gamma$ を単位円板に作用する Fuchs 群とするとき、$S(\Gamma) = S \cap B_2(U,\Gamma), T(\Gamma) = T \cap B_2(D,\Gamma), J(\Gamma) = J \cap B_2(D,\Gamma)$ と置く。これらの位相は全て $B_2(D,\Gamma)$ に於いて考えることにする。

$T(\Gamma)$ は Fuchs 群 $\Gamma$ の Teichmüller 空間（の Bers model）と呼ばれているもので、特に $T$ は普遍 Teichmüller 空間と呼ばれる。これらについて以下のようなことが知られている。

- $T(\Gamma) \subset J(\Gamma) \subset S(\Gamma)$, $T(\Gamma)$ は領域、$S(\Gamma)$ は閉集合、
- $T = \mathrm{Int}S$（ Gehring [4]）
- $\Gamma$ が第 1 種有限生成 Fuchs 群の時、$T(\Gamma) = \mathrm{Int}S(\Gamma)$（ Shiga [5]）
- 任意の Fuchs 群 $\Gamma$ に対して $T(\Gamma)$ は $\mathrm{Int}S(\Gamma)$ の 0-component （ Žuravlev [7]）

$T(\Gamma) = \mathrm{Int}S(\Gamma)$ と予想されるが、特に $\Gamma$ が第 2 種有限生成純双曲的の場合にどの程度これについて言えるか、というのが今回の一つの目標である。

## §2. 局所単葉性を測るノルム達.

この講演では $\|\mu_f\|_\infty \le k(<1)$ なる擬等角写像 $f$ のことを $k$-擬等角（$k$-qc.）であると呼ぶことにする。（通常は $\frac{1+k}{1-k}$-qc. と呼ばれる。）

まず、この節では $D$ は平面領域であると仮定する。

$A \ge 1$ を定数とし、$\mathcal{D}_A(D) = \{B(z_0,r); r > 0, B(z_0,Ar) \subset D\}$ と定める。ただし、ここに $B(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ である。 また、$D$ 上の正則函数 $\varphi$ に対して、新たに次のようなノルムを定義する。

$$\|\varphi\|_D^{(A)} = A^2 \cdot \sup_{\Delta \in \mathcal{D}_A(D)} \|\varphi\|_\Delta,$$

$$\|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}} = \sup_{z \in D} |\varphi(z)| \mathrm{dist}(z,\partial)^2.$$

これについて、以下のような関係が分かる。

命題 **2.1.** $D_1 \subset D_2$ ならば、

$$\|\varphi\|_{D_1} \le \|\varphi\|_{D_2}$$
$$\|\varphi\|_{D_1}^{(A)} \le \|\varphi\|_{D_2}^{(A)}$$
$$\|\varphi\|_{D_1}^{\mathrm{dist}} \le \|\varphi\|_{D_2}^{\mathrm{dist}}$$

命題 **2.2.**

$$\|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}} \le \|\varphi\|_D^{(A)} \le \|\varphi\|_D$$

$$1 \le A_1 \le A_2 \quad \Rightarrow \quad \|\varphi\|_D^{(A_2)} \le \|\varphi\|_D^{(A_1)}$$

$$\|\varphi\|_D^{(A)} \le \min\{4, \left(\frac{A}{A-1}\right)^2\} \cdot \|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}}$$

（注意）特に、$\|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}} = \lim_{A\to\infty} \|\varphi\|_D^{(A)}$ である。

ここで $D$ が単連結ならば Koebe の $\frac{1}{4}$ 定理から次の命題を得る。

命題 **2.3.** $D$ が単連結領域ならば、$\|\varphi\|_D \le 16\|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}}$

（注意）一般にある正定数 $c$ があって $\|\varphi\|_D \le c\|\varphi\|_D^{\mathrm{dist}}$ となるための必要十分条件は

$$\sup\{\mathrm{mod}R : R \text{ は } D \text{ の境界を分離する } D \text{ 内の円環}\} < \infty$$

である（Beardon-Pommerenke [2]）

ここで、次の著名な定理を紹介しておく。

定理 **2.4(Ahlfors-Weill).**
単位円板 $U$ 上の有理型函数 $f$ に対して $\|S_f\| < 2$ ならば $f$ は $\widehat{\mathbf{C}}$ 上の $\frac{1}{2}\|S_f\|_U$-*qc. map* に拡張できる。

この定理と定理 1.1 から、次の命題を得る。

命題 **2.5.** 円板 $\Delta$ 上の単葉函数 $f$ が $\widehat{\mathbf{C}}$ 上の $k$-*qc. map* に拡張されるならば、実は $\|S_f\|_\Delta \le 6k$ が成り立つ。

以上のような命題を組み合わせて最終的に次の定理を得る。

定理 **2.6.** $D$ を双曲的単連結平面領域とする。$A \ge 1, k \in [0,1)$ を定数、$f : D \to \widehat{\mathbf{C}}$ を有理型写像とする。すると、任意の $\Delta \in \mathcal{D}_A(D)$ に対し、$f|_\Delta$ が $\widehat{\mathbf{C}}$ 上の $k$-*qc. map* に拡張されるならば、実は $\|S_f\|_D \le 96A^2k$ である。

定理 **2.7.** $D$ を双曲的平面領域とする。$B > 0, k \in (0,1)$ を定数とする。有理型写像 $f : D \to \widehat{\mathbf{C}}$ が $\|S_f\|_D \le B$ を満たすとする。この時、$B \le 2kA^2$ を満たす定数 $A \ge 1$ をとれば、任意の $\Delta \in \mathcal{D}_A(D)$ に対して $f|_\Delta$ は $\widehat{\mathbf{C}}$ 上の $k$-*qc. map* に拡張できる。

## §3. $\Gamma$ を不変にする qc-surgery.

詳しく説明する space がないので、基本的な idea についてのみ説明しておく。

ここでの目標は、欲しい位相的な性質を持つ $\Gamma$-不変な正則写像を構成することであるが、一般にはそれは非常に難しい。そこで、まず必要な位相的な性質を持った $\Gamma$-不変な quasi-regular map $f : D \to \widehat{\mathbf{C}}$ を構成する。（つまり、局所的には qc だが、大域的には単射とは限らないようなものである。）

そこで、今度は $f^{-1}$ の Beltrami 微分 $\mu$ を考える。ただし、これは逆写像の分枝の取り方によらずに定まることが必要である。（そのためには、例えば像が重なり合うような所では正則になるようにあらかじめ写像を構成しておけばよい。） もし、

これがそういう意味で well-defined ならば、（$\mu$ は $f(D)$ 以外には適当に延長しておいて）$\mu$-擬等角写像 $w = w^{\mu} : \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ を作り、

$$F = w \circ f$$

を考えれば、正則で $\Gamma$-不変な写像が得られる。もちろん、$w$ は球面の自己同相写像だから、$f$ の位相的な性質は保たれるはずである。

このように写像を構成した場合、直接この $F$ の Schwarz 微分を計算するのは容易ではない。そこで、§2. で導入した局所的な qc. 拡張性を用いたノルムが役に立つのである。

## §**4.** Int$S(\Gamma)$ への応用.

今度は、これまでに導入したテクニックを用いて、$\psi \in \mathrm{Int}S(\Gamma)$ に関する性質について調べてみよう。　ここでは $\Gamma$ は第 2 種有限生成純双曲的 Fuchs 群として、その type を $(g, 0, m)$ とする。つまり、商 Riemann 面 $U/\Gamma$ が種数 $g$,border の成分が $m$ 個 $m \geq 1)$ とする。（従って、double をとれば種数 $N = 2g + m - 1$ の閉 Riemann 面になる。）

$h : U \to \mathbb{C}$ を $S_h = \psi$ となる有理型写像とすると、仮定から $h$ は単葉である。$D = h(U)$ とおく。すると、$\psi$ が $S(\Gamma)$ の内点であることからある定数 $a > 0$ が存在して、$\|S_f\|_D \leq a$ ならば $f : D \to \widehat{\mathbf{C}}$ は単葉であることが分かる。　さて、準同型写像 $\chi(\gamma) = h \circ \gamma \circ h^{-1} \in$ Möb と定めれば、$\chi : \Gamma \to G = \mathrm{Im}\chi$ は type-preserving isomorphism であることが分かる。（cf. Sugawa [6]）　したがって、Maskit characterization theorem により、$G$ は種数 $N$ の Schottky 群であることが分かる。

そこで、実は $\psi \in J(\Gamma)$ であることが、以下のような順序で示される。まず、$R_0 = D/G, \quad R = \Omega(G)/G$ とおくと、$R_0$ は種数 $N$ の閉 Riemann 面 $R$ に埋め込まれた $U/\Gamma$ と正則同値な Riemann 面である。

(1)　$\partial R_0$ はちょうど $m$ 個の互いに交わらない単純閉曲線からなることが分かる。（もう少し強いことも言える。）

(2)　埋め込み $R_0 \hookrightarrow R$ は double である。つまり、$\partial R_0$ 上の点を動かさない $R$ の（向きを反転する）位相的な involution が存在する。

(3)　$D$ は Jordan 領域である。

この (1) のステップで、§3. で説明したような qc-surgery の技術を用いるのであるが、詳細は省略する。講演では概略について解説したい。

また、(2) のステップでは次の結果を用いる。

**命題 4.1.**　*$p : \Omega \to R$ を種数 $N$ の閉 Riemann 面 $R$ の Schottky 被覆とする。$R$ の境界に $m$ 個の単純閉曲線を持つ部分領域 $R_0$ について、そのタイプが $(g, 0, m)$　$(2g + m - 1 = N)$ で、さらに $p^{-1}(R_0)$ が単連結領域であるならば、実は埋め込み $R_0 \hookrightarrow R$ は位相的に double である。*

ステップ (3) は上の 2 つから純粋に位相的に従う。

以上の結果次のことが分かる。

**定理 4.2.**　*$\Gamma$ が第 2 種有限生成純双曲的 Fuchs 群ならば、*$\mathrm{Int}S(\Gamma) = \mathrm{Int}J(\Gamma)$ *が成り立つ。*

（注意）　上のステップ (1) でもし $\partial R_0$ の各成分が quasi-analytic curve であることが分かれば実は $\mathrm{Int}S(\Gamma) = T(\Gamma)$ であることが証明される。

## References

[1]. [redacted]eardon, A. F. and F. W. Gehring, *Schwarzian derivatives, the Poincaré metric and the kernel function*, Comment. Math. Helvetici **55** (1980), 50–64.

[2]. [redacted]eardon, A. F. and Ch. Pommerenke, *The Poincaré metric of plane domains*, J. London Math. Soc. **18** (1978), 475–483.

[3]. [redacted]ers, L., *A nonstandard integral equation with applications to quasiconformal mappings*, Acta Math. **116** (1966), 113–134.

[4]. [redacted]ehring, F. W., *Univalent functions and the Schwarzian derivative*, Comment. Math. Helvetici **52** (1977), 561–572.

[5]. [redacted]higa, H., *On analytic and geometric properties of Teichmüller spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 441–452.

[6]. [redacted]ugawa, T., *The Bers projection and the λ-lemma*, J. Math. Kyoto Univ. (to appear).

[7]. [redacted]uravlev, I. V., *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Soviet Math. Dokl. **21** (1980), 252–255.