# ２次元リーマン多様体の等角表現

須川敏幸　　京都大学理学部

**§0. 序.**

この講演では J.Jost ” Two-Dimensional Geometoric Variational Problem ”の第３章：Conformal representation の内容について概略を紹介する。

以下では（境界付き）コンパクト面と言えば、実２次元コンパクト $C^1$ 多様体で境界を持つ場合はその境界も $C^1$ 級であるとする。また、定理の主張を簡潔にするため、ここだけの用語であるが多様体 $S$ 上の可測なリーマン計量 $g = g_{ij}dv^i dv^j$ が有界であるとは（境界の部分も含めた）各 chart に対して

$$g_{ij} \quad \text{is lolally bounded},$$

$$\varDelta = \det(g_{ij}) > 0, \quad \frac{1}{\varDelta}\text{is locally bounded}$$

であることをいう。

★注意：複素数の記号 $w = v^1 + \sqrt{-1}v^2$ を用いて $g = \lambda^2|dw + \mu d\bar{w}|^2$ $(\lambda \geq 0)$ と表現したとき、$g$ が有界 $\Leftrightarrow \lambda, \frac{1}{\lambda}$ がともに有界かつ $\|\mu\|_\infty < 1$、である。

$S$ を有界なリーマン計量 $g$ を持つコンパクト多様体とし、$D$ を $\widehat{\mathbb{C}}$ の部分領域とする。$v \in S$ における接空間 $T_vS$ 上の内積を

$$< X, Y >_v = g_{ij}(v)X^iY^j \quad (X, Y \in T_vS)$$

によって定め、さらに $v \in H^{1,2}(D, S)$ に対して（$g$ に関する）エネルギーを

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{1}{2}\iint_D g_{ij}(v(z))(v_x^i v_x^j + v_y^i v_y^j)dxdy \\ &= \frac{1}{2}\iint_D (< v_x, v_x >_{v(z)} + < v_y, v_y >_{v(z)})dxdy \end{aligned}$$

により定める。また、$v$ が（$g$ に関して）等角 (conformal) であるとは、

$$\begin{aligned} g_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial x}\frac{\partial v^j}{\partial x} &= g_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial y}\frac{\partial v^j}{\partial y}, \\ g_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial x}\frac{\partial v^j}{\partial y} &= 0 \quad \text{a.e. on } D \end{aligned}$$

であることと定める。以下ではこの意味での等角写像のことを等角表現 (conformal representation) と呼ぶこともある。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

★注意：この conformality relation は、$< v_z, v_z >= 0$ a.e. on $D$ と同値であり、さらに形式的には $g$ の $v$ による引き戻し $v^*(g)$ が $D$ 上の Euclid 計量 $|dz|^2 = dx^2+dy^2$ と propotional であることと同値である。

以下では有界なリーマン計量が与えられたコンパクト面に等角構造が入ることを一意化定理も含めて証明する。ここでの等角表現を構成する方法は、基本的にどのような面についてもどうようであるので、最も易しい種数 0 の（境界のない）コンパクト面の場合にやや詳しく説明し、他の場合はその場合とどこが違うか指摘する程度にとどめる。

## §1. $S^2$ に同相な曲面の等角表現.

**定理 3.1.1.**

$S$ を球面 $S^2$ に同相なコンパクト面、$g$ を $S$ 上の有界なリーマン計量とする。このとき、等角表現 $h \in H^{1,2}(\widehat{\mathbb{C}}, S) \cap Homeo(\widehat{\mathbb{C}}, S)$ が存在する。さらに $S$ が $C^{k,\alpha}(C^\infty, C^\omega)$ 級かつ $g$ が $C^{k-1,\alpha}$( *resp.* $C^\infty, C^\omega$) 級ならば $h$ も $C^{k,\alpha}$( *resp.* $C^\infty, C^\omega$) 級である。

以下でこの定理を証明していこう。まず、相異なる 3 点 $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, $p_1, p_2, p_3 \in S$ を選んでおき、

$$\mathcal{D} = \{v : \widehat{\mathbb{C}} \to S : C^1\text{-微分同相写像}, \quad v(z_j) = p_j \quad (j = 1, 2, 3)\}$$

と定める。また、$\overline{\mathcal{D}}$ は $H^{1,2}$ における (uniform & weak-$H^{1,2}$)-closure とする。ここで $\mathcal{D}$ においてエネルギーの下限に近づく列 $v_n \in \mathcal{D}$ を選ぶと、実は適当な部分列を取ればある $v \in \overline{\mathcal{D}}$ があって、(uniform & w-$H^{1,2}$)-topology に関してそれに収束する。これにはエネルギー有界な連続写像の同等連続性を証明する必要があるのだが、次の補題が本質的に重要である。

**補題 3.1.1(Courant-Lebesgue).**

$D$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の部分領域とし、$(N, g)$ を多様体、$d(\cdot,\cdot)$ を $g$ から定まる $N$ 上の距離とする。また、$u \in H^{1,2}(D, N), E(u) \le K$ とする。さらに、$0 < \delta < 1, z_0 \in D$ として、任意の $r \in (\delta, \sqrt{\delta})$ に対して $\partial B(z_0, r) \cap D$ は連結とすると、ある $r \in (\delta, \sqrt{\delta})$ が存在して次の条件を満足する。

$$u|_{\partial B(z_0,r)\cap D} \quad \text{は絶対連続,}$$

$$diam(u(\partial B(z_0, r) \cap D)) \le \sqrt{\frac{8\pi K}{\log 1/\delta}}$$

$$\int \left| \frac{\partial u(z_0 + re^{i\varphi})}{\partial \varphi} \right|^2 d\varphi \le \frac{4K}{\log 1/\delta}$$

★注意：ここに $|\frac{\partial u}{\partial \varphi}|$ は $u(z_0 + re^{i\varphi})$ におけるリーマン計量に関するノルムである。

さて、このような $v = \lim v_n$ に対して $E(v) \le \underline{\lim}\, E(v_n)$ だから実質的に $v$ が $\mathcal{D}$ においてエネルギーの最小値を達成していることが分かる。実は、この $v$ が求めるものの一つであることが次のように示される。

$\sigma_t : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}} \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ を $t$ について滑らかに依存する微分同相写像の族とすると $E(v)$ の最小性から

$$\frac{d}{dt} E(v \circ \sigma_t)\big|_{t=0} = 0$$

となる。このことから

$$\varphi = < v_z, v_z > dz^2$$

とおくとこれは補題 1.2.4 から $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の正則２次微分となる。ここで $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の正則２次微分は 0 しかないことから $\varphi = 0$ が従う。これはとりもなおさず、$v$ の conformality relation である。

あとは $v \in Homeo(\widehat{\mathbb{C}}, S)$ を示せばよいが、このためには次のような順序で議論を進める。まず、便宜上 $S$ には元の $C^1$ 構造と compatible な $C^\infty$ 構造を１つ入れておく。

１．$Jac(v)$ は (a.e. に）定符号である。（それを $k = \pm 1$ とする。）

２．これより $v = (v^1, v^2)$ は次の elliptic system の解であることが分かる。

$$v_x^2 = -{g_{22}}^{-1}(g_{21} v_x^1 + k\sqrt{\Delta} v_y^1)$$
$$v_y^2 = {g_{22}}^{-1}(k\sqrt{\Delta} v_x^1 - g_{12} v_y^1)$$

３．$g \in C^1$ とすると regularity から $v \in C^2$ となる。

４．$g \in C^1$ とすると $v$ は位相同型である。（この事実の証明には $v$ の調和性から $v_z^1$ の零点が孤立していること（補題 2.6.1 及び系 2.6.1）と、等角性から $Jac(v) = \frac{4k\sqrt{\Delta}}{g_{22}} |v_z^1|^2$ であることから従う。）

５．$g \in C^1$ とすると $v$ は $C^2$ 微分同相写像である。（これは補題 2.7.4 から直接従う。）

６．$g$ が一般の場合は $g$ を smooth な $g_n$ で近似して議論する。$g_n$ に関する３点の行き先を指定した等角写像を $h_n$ とすれば $(h_n)$ は同等連続でさらに $f_n = (h_n)^{-1}$ とすれば $h_n$ の等角性から $f_n$ は次の elliptic system

$$y_{v^1} = \frac{k}{\sqrt{\Delta}}(g_{21} x_{v^1} - g_{11} x_{v^2})$$
$$y_{v^1} = \frac{k}{\sqrt{\Delta}}(g_{22} x_{v^1} - g_{12} x_{v^2})$$

の解であることが分かり、やはり $(f_n)$ も同等連続性を持つことが reguralityティ theory から分かる。あとは極限をとれば $h = \lim h_n$ が逆写像 $f = \lim f_n$ を持つことが分かる。従って、$h \in Homeo(\widehat{\mathbb{C}}, S)$ である。

さて、$S$ が $C^{k,\alpha}$ 級で $g$ が $C^{k-1,\alpha}$ 級の場合 $h \in C^{k,\alpha}$ となることはやはり $g$ の近似の議論と elliptic system の reguralityから従う。

系 **3.1.1.**

等角写像 $v : \widehat{\mathbb{C}} \to S$ は向き *(orientation)* と３点の行き先を指定すれば一意的に定まる。

系 **3.1.2.**
$S$ を単位 *(閉)* 円板 $U$ と同相な境界を持つコンパクト面とし、$g$ は $S$ 上の有界なリーマン計量とする。このとき、等角表現 $h : U \to S$ が存在する。$h$ の滑らかさについても定理 *3.1.1* と同様の結果が成り立つ。

## §2. planar なコンパクト曲面の等角表現.

定理 **3.2.1.**
$S$ は境界を持つコンパクト面で $k$ 個の円板で囲まれた有界平面 *(閉)* 領域と同相であるとする。$g$ は $S$ 上の有界なリーマン計量とする。このとき、境界が互いに共通点を持たない $k$ 個の円周からなるある有界平面 *(閉)* 領域 $B$ とその上の $S$ の等角表現 $h \in H^{1,2}(B,S) \cap Homeo(B,S)$ が存在する。さらに、この $h$ は $B$ の外側の境界上の３点（または内部の３点）の行く先を指定することにより一意的に定まる。また、$h$ の滑らかさに関しても定理 *3.1.1* と同様の結果が成り立つ。

証明の方針は定理 3.1.1 と同様だが異なるポイントのみ指摘しておこう。 まず、$k$ 個の互いに共通点を持たない円周で囲まれた閉領域で外側の境界が単位円周となるもの全体を $\mathcal{B}$ とし、$z_1, z_2, z_3 \in \partial U$, $p_1, p_2, p_3$ を $\partial S$ の 1 つの成分上に適当な順序でとり、

$$\mathcal{D} = \{v : B \to S : C^1\text{微分同相写像}, B \in \mathcal{B}, v(z_j) = p_j \quad (j = 1, 2, 3)\}$$

とする。するとやはり§1 での証明と同様にして、$\mathcal{D}$ のエネルギー最小化列を取れば、ある $B \in \mathcal{B}$ があってその部分列の (uniform & w-$H^{1,2}$)-極限となっている $v \in H^{1,2}(B,S) \cap C^0(B,S)$ が存在する。するとやはり $\varphi(z)dz^2 =< v_z, v_z > dz^2$ とおけば $\varphi$ が正則２次微分で $\partial B$ 上 real となることは補題 1.2.5 から分かるが、さらに $\varphi = 0$ を言うためにはもう少し情報が必要である。これは $\partial B$ の成分 $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ とし、円 $\gamma_j$ の中心を $z_j$ としたとき、

$$\int_{\gamma_j} \varphi(z)dz = 0,$$

$$\int_{\gamma_j} (z - z_j)\varphi(z)dz = 0,$$

$$\varphi(z)dz^2 \quad \text{is real on} \quad \partial S$$

が成り立つ。これより、$\varphi = 0$ が従う。

## §3. 種数 $\geq 2$ のコンパクト曲面の等角表現.

定理 **3.3.1.**
$S$ は向き付けられた（境界のない）種数 $p \geq 2$ のコンパクト面で $g$ は $S$ 上の有界なリーマン計量とする。このとき、等角写像 $h : \mathbb{H} \to S$ と、$\pi_1(S)$ と同型な *Fuchs* 群 $T < PSL_2(\mathbb{R})$ が存在してこの $h$ は *Deck* 変換群を $T$ とする被覆写像となり、$h \in H^{1,2}(\mathbb{H}/T, S) \cap Homeo(\mathbb{H}/T, S)$ が成り立つ。また、$h$ の滑らかさについては定理 *3.1.1* と同様の結果が成り立つ。さらに、$S$ が $C^{1,\alpha}$ 級、$g$ が $C^{0,\alpha}(\alpha > 0)$ で $\mathbb{H}$ の１点 $z_0$ と $S$ の１点 $p_0$ とそれぞれの方向ベクトルを与えれば各々を対応させるような $h$ は一意的に定まる。

この定理の証明では

$$\mathcal{D} = \{(v, T) : T \text{ は純双曲的 Fuchs 群}, v : \mathbb{H}/T \to S : C^1\text{-微分同相写像 }\}$$

とし、$(v,T)\in\mathcal{D}$ のエネルギーは

$$E(v)=\frac{1}{2}\iint_{z\in\mathbb{H}/T} g_{ij}(v(z))\left(\frac{\partial v^i}{\partial x}\frac{\partial v^j}{\partial x}+\frac{\partial v^i}{\partial y}\frac{\partial v^j}{\partial y}\right)dxdy$$
$$=\frac{1}{2}\iint_{z\in\mathbb{H}/T}\left(< v_x,v_x>_{v(z)}+< v_y,v_y>_{v(z)}\right)dxdy$$

によって定める。そこでやはり $(w_n,T_n)$ をエネルギーを最小にする $\mathcal{D}$ 内の列とする。すると、エネルギーの有界性と collar lemma から次の補題が従う。

補題 **3.3.4(Schoen-Yau).**
$n$ に無関係な正定数 $l_0$ が存在して $\mathbb{H}/T_n$ の単純閉測地線の長さは $l_0$ 以上となる。

この補題と Mumford の compactness lemma（補題 3.3.2）から、適当な部分列をとればある Fuchs 群 $T$ があって $T_n\to T(n\to\infty)$ かつ $\mathbb{H}/T$ は $\mathbb{H}/T_n$ に微分同相となることが分かる。ここで $T_n\to T(n\to\infty)$ の意味はある点 $z_0\in\mathbb{H}$ に関する $T_n$ の Dirichlet 基本領域 $\Sigma(T_n)$ が $\Sigma(T)$ に収束することである。

一方、$w_n$ も (uniformly & w-$H^{1,2}$)-位相に関して収束する部分列を持つことが分かるので（補題 3.3.6）、$w_n\to v,\quad T_n\to T$ としてよい。$v$ のエネルギー最小性からやはり $\varphi=< v_z,v_z> dz^2$ とおけば $\varphi$ は $\mathbb{H}/T$ 上の正則2次微分である。特に $\varphi$ を $\mathbb{H}$ 上の正則函数とみなせば、

$$\mu(z):=\overline{\varphi(z)}\cdot y^2=\overline{\varphi(z)}\rho_{\mathbb{H}}(z)^{-2}\in L^\infty(\mathbb{H})$$

である。$t\mu$ をベルトラミ係数とする擬等角写像 $\sigma_t:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ に対して

$$\frac{d}{dt}E(v\circ\sigma_t)\Big|_{t=0}=0$$

より実は $\iint_{\mathbb{H}/T}|\varphi|^2y^2dxdy=0$ が従い、これより $\varphi=0$ が分かる。後は§1 と全く同様である。

★注意：同様にして種数 $p=1$ の場合や種数 $p\geq 1$ で境界を持つ場合も扱える。（主張は省略する。）