第2種有限生成純双曲的 FUCHS 群の TEICHMÜLLER 空間について

須川敏幸　　京都大学理学部
1993/11/18　於・静岡大学

§**1. 主結果.**　この講演では、次の結果の証明のいくつかのポイントについて説明する。

定理.
Γ を第2種有限生成純双曲的 *Fuchs* 群とすれば、$\mathrm{Int}S(\Gamma)=T(\Gamma)$ が成り立つ。

ここに、$S(\Gamma)=\{S_f; f$ は単位円板上の単葉函数 $\}\cap B_2(\Gamma)$,$T(\Gamma)=\{S_f\in S(\Gamma); f(U)$ は quasidisk$\}$ とする。ただし、$B_2(\Gamma)$ は次の Banach 空間：$\{\varphi:U\to\mathbb{C};$ 正則函数$,\|\varphi\|_U=\sup_{|z|<1}|(1-|z|^2)^2\varphi(z)|<\infty\}$ とする。$T(\Gamma)$ は Γ の Teichmüller 空間の Bers モデルと呼ばれる。
元々、L.Bers により $S(1)=\overline{T(1)}$ と予想されたが、これは Gehring(1978) により否定されたものの、やや弱い形の主張：$\mathrm{Int}S(1)=T(1)$ がやはり Gehring(1977) により示された。一般の Fuchs 群 Γ に対しては、Žulavlev(1980) により「$T(\Gamma)$ は $\mathrm{Int}S(\Gamma)$ の 0 を含む連結成分である」ということまでは証明された。従って、一般に $\mathrm{Int}S(\Gamma)=T(\Gamma)$ であることが自然に予想される。第1種有限生成 Fuchs 群については東工大の志賀氏 (1985) により実際に $\mathrm{Int}S(\Gamma)=T(\Gamma)$ であることが証明されたが、それ以外の場合についてはその後目立った進展は得られていないようである。そこで、今回筆者は上記のような形でこの予想に関して部分的にではあるが解決を与えた（と信じている）。　ただ、より一般の場合には様々な困難があり、以下で説明する手法では限界があると思われる。特に、無限生成の場合や第1種の場合には通用しないように思われる。従って、全く別の手法が必要なのかもしれない。

まず、この定理の証明の概略を説明しよう。次のような順序で証明される。
★1　基点の取り替え
$\varphi\in\mathrm{Int}S(\Gamma)$ として、$f=f_\varphi$ を $S_f=\varphi$ なるものとすると、$G=f\Gamma f^{-1}$ は単連結領域 $D=f(U)$ に作用する Klein 群になる。さらに、上記の定理の仮定の下に、G は Schottky 群になることが分かる。以下ではこの Schottky 群の作用について調べることを目標とする。

★2　十分小さい Schwarz 微分を持つ単葉でない G-同変な正則函数の構成 (I)
ここでは擬等角変形を用いて、このような構成を行う。Schwarz 微分の評価については、論文[S2] のテクニックを用いる。

★3　R_0 の境界は単純閉曲線の disjoint union（ここで $R_0=D/G\subset R=\Omega(G)/G$）
これは★2からの帰結：R_0 が局所的には linearly connected であることを用いて証明される。そこに於いて、annular covering の議論が用いられる。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

★４ R は R_0 の double になっていること
これには、基本群やホモロジー群などの代数的計算を用いる。

★５ D は Jordan 領域
これは誘導写像 $\bar{f} : S_0 = U/\Gamma \to R_0$ を homotopically canonical に同相写像 $S = \Omega(\Gamma)/\Gamma \to R$ に拡張することにより証明される。直感的には自明なことのように思えるが、厳密にやるにはかなり面倒なことのように著者には思える。（例えば、Schottky 群に関する Marden の結果などを援用している。） もっと簡単な抜け道があればぜひご教示頂きたい。

★６ 十分小さい Schwarz 微分を持つ単葉でない G-同変な正則函数の構成 (II)
今度は、本質的には R_0 の外部が linearly connected であるということを証明する。Gehring の universal Teichmüller 空間の場合の証明ではこの部分は★２と全く同様に出来たので問題なかったのだが、今度は群の作用が絡んでいるためここが筆者にとって最大の難関であった。が、意外と直接的方法で解決した。

★７ ∂R_0 は quasi-analytic curve の disjoint union
これは★６からの直接的帰結である。

★８ D は quasidisk
これは、∂R_0 の境界が quasi-analytic curves ならば、擬等角写像 $S_0 \to R_0$ が全体に qc に拡張できるという結果から従う。

以上が証明の概略であるが、この講演では主に４と５について説明したいと考えている。この定理に関しては現在論文にまとめている最中で、近いうち完成させたいと思っているので、その暁にはまた preprint をお送りしたいと思います。

References

[S1] T[redacted]ugawa, *The Bers projection and the λ-lemma*, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 701–713.
[S2] T[redacted]ugawa, *A class of norms on the spaces of Schwarzian derivatives and its applications*, Proc. Japan Acad. **69** (1993), 211–216.