SCHOTTKY 型 FUCHS 群に対する予想：INT $S(\Gamma)=T(\Gamma)$ について

京都大学理学部
須川敏幸
1993/11/26　於・京都産業大学

§1. 記号及び主定理.

G を Klein 群とし、D を G-不変な領域で $\#(\widehat{\mathbb{C}}\setminus D)\ge 3$ とする。$\rho_D(z)|dz|$ を D 上の Poincaré 計量（から定まる線素）としたとき、D 上の正則函数 φ に対し次のようにノルムを定義する。

$$\|\varphi\|_D=\sup_{z\in D}\rho_D(z)^{-2}|\varphi(z)|.$$

また、このノルムにより次の空間

$$B_2(D,G)=\{\varphi:D\to\mathbb{C}:\text{正則},(\varphi\circ g)(g')^2=\varphi\quad\forall g\in G,\|\varphi\|_D<\infty\}$$

は複素 Banach 空間になる。特に G が単位円板 $U=\{|z|<1\}$ に作用する Fuchs 群の時は単に $B_2(G)=B_2(G,U)$ と書くことにする。

次に U に作用する Fuchs 群 Γ に対して

$$\begin{aligned} S(\Gamma)&=\{S_f\in B_2(\Gamma);f:U\to\widehat{\mathbb{C}}\text{は単葉}\},\\ J(\Gamma)&=\{S_f\in S(\Gamma);f(U)\text{ は Jordan 領域}\},\\ T(\Gamma)&=\{S_f\in J(\Gamma);f(U)\text{ は quasidisk}\}\end{aligned}$$

と定義する。ただし、S_f は f の Schwarz 微分、すなわち $S_f=(f''/f')'-\frac{1}{2}(f''/f')^2$ とする。また、ここで「$f:U\to\widehat{\mathbb{C}}$ が単葉 $\Longrightarrow\|S_f\|_U\le 6$」（Nehari の定理）に注意しておこう。また、Jordan 領域 D が quasidisk であるとは、ある擬等角写像 $h:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ が存在して $D=h(U)$ となることである。

$S(\Gamma)\supset J(\Gamma)\supset T(\Gamma)$ は $B_2(\Gamma)$ からの誘導位相を入れて考える。知られていることは、$B_2(\Gamma)$ の中で $S(\Gamma)$ は有界閉集合、$T(\Gamma)$ は有界領域となっていることである。従って特に、$S(\Gamma)\supset\overline{T(\Gamma)}$ であることが分かる。$T(\Gamma)$ は Γ の Teichmüller 空間（の Bers 模型）と呼ばれる。また、$S(\Gamma)$ は時に Γ の擬 Teichmüller 空間とも呼ばれる。Γ が第 2 種（つまり、極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ が ∂U と一致しない）ならば、$S(\Gamma)\setminus\overline{J(\Gamma)}\ne\varnothing, J(\Gamma)\setminus\overline{T(\Gamma)}\ne\varnothing$ であることが知られているが（[S2]）、一方任意の Fuchs 群 Γ に対して $\mathrm{Int}S(\Gamma)=T(\Gamma)$ であると予想される。これについては、実際に Γ が単位群の場合には Gehring（[G]）、第 1 種有限生成の場合には志賀氏（[Sh]）により正しいことが証明されている。また、一般の場合についても少なくとも $\mathrm{Int}S(\Gamma)$ の 0 を含む成分が $T(\Gamma)$ と一致するということまでは分かっている。（Žuravlev [Z]）この予想についてこれら以降見るべき結果は出ていないようであったが、ようやく次の結果が得られた。

主定理. Γ を *Schottky* 型 *Fuchs* 群、すなわち第２種有限生成純双曲的 *Fuchs* 群とすれば、$\mathrm{Int}S(\Gamma) = T(\Gamma)$ が成り立つ。

ここで、純双曲的とは単位元以外の元が全て双曲的であることを意味する。この講演ではこの結果の証明の概略について述べたい。

§2. 主定理の証明の概略.

Γ を Schottky 型 Fuchs 群とする。$\varphi \in \mathrm{Int}S(\Gamma)$ としたとき、$G = f\Gamma f^{-1}$ は $D = f(U)$ に不連続に作用する Klein 群になるが、同型写像 $\chi(\gamma) = f\circ\gamma\circ f^{-1} : \Gamma \to G$ は type-preserving であるから（[S2]）、Maskit characterization theorem により G は Γ と同じ rank の Schottky 群となる。そこで、$S_0 = U/\Gamma, S = \Omega(\Gamma)/\Gamma, R_0 = D/G, R = \Omega(G)/G$ とおき、$p : \Omega(\Gamma) \to S, q : \Omega(G) \to R$ をそれぞれ標準射影とする。

$\varphi \in T(\Gamma)$ を示すためには、D が quasidisk であることを言えばよいが、S_0 の種数を g、穴の個数を m として、本質的には

1. ∂R_0 はやはり m 個の quasi-analytic curves から成る,
2. f から誘導される等角写像 $\bar{f} : S_0 \to R_0$ が homotopy action に関して自然に擬等角写像 $\hat{f} : S \to R$ に拡張出来る。

の２つを示せばよい。１については、次の補題がその核心部分をなしている。

補題. この D に対してある定数 $B \geq 1$ が存在して次の２つが成り立つ。

イ. 円板 Δ が $\Delta_B \subset \Omega(G)$ を満たすならば、$\Delta \cap D$ の任意の２点は $\Delta_B \cap D$ 内の道で結べる。

ロ. 円板 Δ *s.t.* $\Delta_B \subset \Omega(G)$ に対し、$D \setminus \bar{\Delta}$ の成分 D_0 が存在して $D \setminus D_0$ が *1* つの G の単射円板に含まれるとすると、$D \setminus \overline{\Delta_B}$ の任意の２点は $D \setminus \bar{\Delta}$ 内の道で結べる。

ここで Δ_B は Δ と同じ中心を持ち半径が B 倍の円板を表す。この２つの性質から ∂R_0 の各成分が quasi-analytic curve であることが従う。（厳密な証明には“ annular covering ”を用いる。その場合、R_0 の境界成分がコンパクトなので上記のようなややテクニカルな条件にはそれほど神経質になる必要はない。）

２についてはまずその正確な意味を述べる必要があろう。S は S_0 の自然な double になっている。つまり、∂U に関する reflection が自然な involution $I : S \to S$ を誘導する。（$I \circ I = \mathrm{id}_S, I(S_0) \cap S_0 = \varnothing, I|_{\partial S_0} = \mathrm{id}_{\partial S_0}$）

これと同様に R も R_0 の double になっていること、つまり $R \setminus \overline{R_0}$ が連結であることが代数的計算により分かる。しかし、involution の取り方は $\{h \in Homeo^+(R \setminus R_0); h|_{\partial R_0} = \mathrm{id}_{\partial R_0}\}$ の分の自由度がある。

J を R の R_0 に関する１つの involution とすると、

$$\hat{f} = \begin{cases} \bar{f} & (\text{ on } S_0) \\ J \circ \bar{f} \circ I & (\text{ on } S \setminus S_0) \end{cases}$$

により $\bar{f}$ の同相写像への拡張 $\hat{f} : S \to R$ が得られるが、この $\hat{f}$ が次の性質を持つようにうまく拡張したい。

(i) $\hat{f}$ は擬等角写像、

(ii) $\hat{f}_* \circ p_*(\pi_1(\Omega(\Gamma), \zeta_0)) = q_*(\pi_1(\Omega(G), f(\zeta_0)))$,

ただし、ここに $\zeta_0 \in U$ は定点とする。これが成り立てば、$\hat{f}$ は lift$\tilde{f} : \Omega(\Gamma) \to \Omega(G)$ を持つ。$\tilde{f}$ は擬等角同相写像であり、$\Omega(\Gamma), \Omega(G)$ の補集合は Cantor 集合だから $\tilde{f}$ は自然に位相同型写像 $\tilde{f} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ に（一意的に）拡張される。さらに、$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega(\Gamma) \subset \partial U$

で、∂U は qc に関して除去可能だから $\tilde{f} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は擬等角写像となる。これより、$D = \tilde{f}(U)$ が quasidisk であることが従う。

ここで、上記の (ii) は位相幾何的な結果であり、(i) は ∂R_0 が quasi-analytic curves からなることから局所的には qc-reflection が構成されることから従う。

References

[Sh] S[redacted]ga, H., *Characterization of quasi-disks and Teichmüller spaces*, Tôhoku Math. J. **37** (1985), 541–552.

[S1] S[redacted]gawa, T., *On the Bers conjecture for Fuchsian groups of the second kind*, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 45–52.

[S2] T[redacted]ugawa, *The Bers projection and the λ-lemma*, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 701–713.

[S3] T[redacted]ugawa, *A class of norms on the spaces of Schwarzian derivatives and its applications*, Proc. Japan Acad. **69** (1993), 211–216.

[Z] [redacted]uravlev, I. V., *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Soviet Math. Dokl. **21** (1980), 252–255.