一様完全性を特徴付ける種々の領域定数について

須川敏幸　　　京都大学大学院理学研究科

Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の部分領域 D で境界が 3 点以上からなるものを考える。するとよく知られているように、上半平面 $\mathbb{H}$ から D への解析的普遍被覆写像 f が存在する。この Schwarz 微分 $S_f = (f''/f')' - \frac{1}{2}(f''/f')^2$ の双曲ノルム

$$N_D := \|S_f\|_{\mathbb{H}} = \sup_{z\in\mathbb{H}} (2\mathrm{Im} z)^2 |S_f(z)|$$

がどのような時に有限になるだろうか？（N_D は f の選び方によらず、D のみにより定まる。）　これについては、Pommerenke [P1],[P2] により様々な幾何学的考察が行われており、N_D が有限であるような領域に様々な特徴付けが見いだされ、単連結領域に近い性質を持つことなどが知られている。このような領域のことを（Minda の用法に従って）一様完全領域と呼ぶことにしよう。　ここでは、関連する領域定数の相互の関係を論じていきたい。まず次のように記号を定める。

$$\sigma_D := f \text{ の単射半径 } = \sup\{a \ge 0;\ \text{任意の半径 } a \text{ の双曲円板上で } f \text{ は単射 }\}$$

$$M_D = \sup_{A\in\mathcal{A}_D} \quad \mathrm{mod}\ A, \quad \widetilde{M}_D = \sup_{R\in\widetilde{\mathcal{A}}_D} \quad \mathrm{mod}\ R$$

ただし、ここに $\mathcal{A}_D, \widetilde{\mathcal{A}}_D$ は D の境界を分離するような D 内の (round) annulus の全体、ring domain の全体をそれぞれ表すとする。また、ring domain R のモジュラス　$\mathrm{mod}\ R$ は R が round annulus $\{r_1 < |z-a| < r_2\}$ に等角同値な時 $\log r_2/r_1$ により定義されるものとする。　これらについて、次のような評価が得られる。

定理 **1(Kra-Maskit, cf.[S]).**
D が単連結でなければ、$2\coth^2\sigma_D \le N_D \le 6\coth^2\sigma_D$.

定理 **2.**

$$\frac{\pi^2}{2\sigma_D}e^{-2\sigma_D} \le \frac{\pi}{\sigma_D}\arctan\left(\frac{1}{\sinh(2\sigma_D)}\right) \le \widetilde{M}_D \le \frac{\pi^2}{2\sigma_D}.$$

$\sigma_D, \widetilde{M}_D$ は等角同値であるが（特に $\widetilde{M}_D$ は擬等角写像について quasi-invariant であることは特筆に値する）、M_D については Möbius 不変ですらない。しかし、次のような評価は成り立つ。

定理 **3.**
L を *Möbius* 変換の元とするとき、$\frac{1}{2}M_{L(D)} - \log 4/3 \le M_D$ が成り立つ。さらに $D \subset \mathbb{C}$ かつ $L(D) \subset \mathbb{C}$ の場合には $M_{L(D)} - \log 2 \le M_D$ が成り立つ。

また、M_D と $\widetilde{M}_D$ との関係については $M_D \le \widetilde{M}_D$ は定義から明らかだが、逆向きについても次のような評価が成立する。

定理 4(cf. McMullen [M, Thorem 2.1]).
$D \subset \mathbb{C}$ の場合には $\widetilde{M}_D \le M_D + 5\log 2$

系.
$N_D < \infty \Leftrightarrow \sigma_D > 0 \Leftrightarrow M_D < \infty \Leftrightarrow \widetilde{M}_D < \infty$ 特に一様完全領域の擬等角写像による像もまた一様完全である。

他にも関連する領域定数が考えられるが、スペースの都合でここでは省略し、講演中に述べることにしたい。なお、講演では触れられないが、このような一様完全領域の BMO を用いた種々の特徴付けについては後藤氏 [G] による興味深い結果があることを付言しておく。

References

[G]. [redacted] Gotoh, *On holomorphic maps between Riemann surfaces which preserve BMO*, *Preprint.*

[M]. [redacted] McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Annals of Mathematical Studies, Princeton, 1994.

[P1] C[redacted]. Pommerenke, *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*, Arch. Math. **32** (1979), 192–199.

[P2] C[redacted]. Pommerenke, *On uniformly perfect sets and Fuchsian groups*, Analysis **4** (1984), 299–321.

[S]. [redacted]. Sugawa, *A class of norms on the spaces of Schwarzian derivatives and its applications*, Proc. Japan Acad. **69, Ser. A** (1993), 211–216.