ON MODULATED RIEMANN SURFACES

須川 敏幸　（京都大学大学院・理学研究科）

この講演では modulated Riemann surface を特徴づける種々の定数についての関連について述べることにしたい。ここでリーマン面 Rが modulated であるとは、次の定数

$$M_R := \sup_{A \in \mathcal{A}_R} m(A)$$

が有限であることを言う。ただし、ここに $\mathcal{A}_R$は Rの中に essential に埋め込まれた円環領域全体のなす集合とし、$m(A)$ は円環領域の modulus とする。つまり、A が $\{z; 1 < |z| < r\}$ に等角同値であるときに、$m(A) = \log r$と定めることにする。

特にリーマン面 Rが双曲的であるとき、この量がその面の単射半径と密接な関係があることは以前に報告したが、今回はさらに良い評価が得られたのでそれを報告したい。すなわち、I_Rを定曲率-4 の双曲計量に関する Rの単射半径とするとき、次の不等式が成り立つ。

$$2I_R \leq \frac{\pi^2}{M_R} \leq \min\{2I_R e^{2I_R}, 2{I_R}^2 \coth^2 I_R\}.$$

このことから、modulated Riemann surface は単射半径が正であるようなリーマン面と思うこともできる。

この結果は実は定数 M_Rおよび I_Rをそれぞれ単純閉曲線（の自由ホモトピー類）の極値的長さ、及び双曲的長さで書き表すことにより、極値的長さと双曲的長さの比較定理から導かれる。近年極値的長さを用いたリーマン面及び Teichmüller 空間の研究も盛んになってきており、この比較定理自体も重要性があると思われる。

閉曲線αの自由ホモトピー類 $[\alpha]$ の極値的長さ $E[\alpha]$ は

$$E[\alpha] = \sup_{\tau} \frac{\left(\inf_{\alpha' \in [\alpha]} \int_{\alpha'} \tau(z)|dz|\right)^2}{\iint_R \tau(z)^2 dxdy}$$

によって定義される。ただし、ここに sup は R上の Borel 可測な等角計量τ全体にわたって取るものとする。また、αに対応する閉測地線の長さを $\ell[\alpha]$ で表す。(puncture に対応する時はもちろん 0 と定める。)

この時次の比較定理が成り立つ。

$$\frac{2}{\pi}\ell[\alpha] \leq E[\alpha] \leq \frac{2}{\pi}\ell[\alpha]e^{\ell[\alpha]}$$

これは collar lemma から直接従う結果であり、その collar lemma 自体は最良の結果であるにもかかわらず、実は次の形の評価も得られる。

$$E[\alpha] \leq \frac{1}{\pi}\coth^2 I_R \cdot \ell[\alpha]^2.$$

これは R上の正則２次微分の空間を考察することによって得られるもので、もともとは松崎氏のアイデアによる。

証明の方針や、その他関連する定数の評価などについては講演中に述べたいが、筆者のプレプリント“ Various domain constants related to the uniform perfectness ”に詳細を書いておいたので、興味のある方はそちらを参照して頂きたい。これについては本人に直接請求するか、postscript file が京都大学数学教室のホームページ

http://neptune.kusm.kyoto-u.ac.jp:8080/preprint/

に置いてあるのでそちらからダウンロードすることも可能である。