UNIFORM PERFECTNESS OF THE LIMIT SETS OF KLEINIAN GROUPS

須川 敏幸

京都大学大学院・理学研究科

1996/11/21 於 東工大

この講演では$\widehat{\mathbb{C}}$に作用する一般の Klein 群の極限集合の一様完全性について述べる。ここで$\widehat{\mathbb{C}}$の 3 点以上からなる閉集合 Eが一様完全であるとは次の互いに同値な条件のいずれか一つ（従って、全て）が成り立つことである。ただし今$\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$であるとする。

(1) ある定数 Mがあって Eを分離する円環領域 A について常に$\mathrm{mod}(A) \le M$が成り立つ。
(2) ある定数 $\ell_0 > 0$があってΩ内の任意の非自明な閉曲線αに対してその双曲的長さ $\ell_\Omega(\alpha) \ge \ell_0$である。
(3) ある定数$c \in (0,1]$が存在して次が成り立つ。任意の$a \in E$及び $r \in (0, \mathrm{diam}(E))$ に対して
$$\mathrm{cap}(E \cap B(a,r)) \ge cr$$
である。ただしここにcap は対数容量を表し $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < r\}$ とする。

さて、Rを定曲率-4 の双曲計量ρ_Rを持つ（連結とは限らない）双曲的リーマン面とし $\mathcal{C}_R, \mathcal{S}_R$をそれぞれ R内の非自明な閉曲線，単純閉曲線の自由ホモトピー類全体のなす集合とし、

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_R^* &= \{[\alpha] \in \mathcal{C}_R; \alpha\text{は puncture にホモトピック (なものの冪）ではない }\}) \\ &= \{[\alpha] \in \mathcal{C}_R; \ell_R[\alpha] > 0\},\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_R^* = \mathcal{S}_R \cap \mathcal{C}_R^*$とする。ただしここに $\ell_R[\alpha]$ はそのホモトピー類に含まれる閉測地線の双曲的長さを表す。

そこで $L_R := \inf_{[\alpha]\in\mathcal{S}_R^*} \ell_R[\alpha]$ と定義する。この定数はリーマン面上の２次微分の空間を考える上で非常に重要な量である。$A_2(R), B_2(R)$ をそれぞれ R上の可積分、及び双曲的有界な正則２次微分φ のなすバナッハ空間とする。（つまりそれぞれノルム $\|\varphi\|_1 = \iint_R |\varphi|, \|\varphi\|_\infty = \sup |\varphi|\rho_R^2$を持つバナッハ空間である。）このとき次の結果が成り立つ。

定理 0.1. Rを連結な双曲的リーマン面とするとき $A_2(R) \subset B_2(R)$ であるための必要十分条件は $L_R > 0$ である。

そこで $L_R > 0$ となるリーマン面を Lehner 型であると呼ぶことにし、L_Rを Lehner 定数と仮に名付けておこう。今回の講演ではこのような定数を用いて Klein 群の極限集合が一様完全となるための十分条件を与える。

定理 0.2. G を *torsion free* な非初等的 *Klein* 群とし $R = \Omega(G)/G$ とする。もし Rが *Lehner* 型であるならば G の極限集合は一様完全でありその一様完全性は L_Rで評価される。

証明は非常に簡単である。一般に$\pi : \Omega \to R$を正則な被覆写像であるとし

$$\mathcal{C}_R(\pi) = \{[\alpha] \in \mathcal{C}_R; \alpha は\pi により単純閉曲線に持ち上げることが出来る \}$$

とおけば，被覆写像は双曲計量に関しては局所等距離であるから

$$\inf_{[\alpha]\in\mathcal{S}_\Omega} \ell_\Omega[\alpha] = \inf_{[\beta]\in\mathcal{C}_R(\pi)} \ell_R[\beta]$$

であることが分かる。よって、もし $\mathcal{C}_R(\pi) \subset \mathcal{C}_R^*$であることが分かれば

$$\inf_{[\alpha]\in\mathcal{S}_{\Omega(G)}} \ell_{\Omega(G)}[\alpha] \geq \inf_{[\beta]\in\mathcal{C}_R^*} \ell_R[\beta] = L_R > 0$$

であることが言え G の極限集合が一様完全であることが証明される。

系 0.3. G を主定理におけるものとすると L にのみ依存する定数 $c > 0$ が存在して任意の $a \in \Lambda(G), r \in (0, \mathrm{diam}\Lambda(G)]$ に対して$\mathrm{cap}(\Lambda(G) \cap B(a, r)) \geq cr$ が成り立つ。

系 0.4. 任意の有限生成 *Klein* 群の極限集合は一様完全である。

この系を得るにはSelbergの補題を用いて torsion free の場合に帰着すればよい。後は Ahlfors の有限性定理を用いれば容易に得られる。なお、この結果は既に Pommerenke らにより知られており，さらにより一般に解析的有限な Klein 群についてもその極限集合の一様完全性が例えば Canary により既に示されていた。

なお、無限生成で torsion を許す場合については極限集合の一様完全性を保証するにはもう少し条件が必要である。講演では時間があればこの点についても述べたい。

最後に一様完全でない極限集合を持つ Klein 群の例を挙げておく。

例 0.1. $a_j, b_j \in \mathbb{C}(a_j \to \infty, b_j \to \infty), r_j > 0, \alpha_j \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}(j = 1, 2, \ldots.)$ が与えられていて閉円板 $A_j = \bar{B}(a_j, r_j), B_j = \bar{B}(b_j, r_j)(j \in \mathbb{N})$ が互いに disjoint であるとする。この時、$g_j(z) = b_j - \frac{\alpha_j r_j^2}{z - a_j}$とすれば $G = \langle g_j; j \in \mathbb{N}\rangle$ は無限生成 Schottky 群となる。

$$\tilde{r}_j = \mathrm{dist}(a_j, (\bigcup_{k\neq j} A_k) \cup (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k)) > r_j$$

とおくことにする。もし $\sup_j \tilde{r}_j / r_j = \infty$ ならば$\Lambda(G)$ は一様完全ではない。

もちろん、無限生成 Schottky 群でも一様完全極限集合を持つものも存在する。