

# UNIFORMLY PERFECT SETS AND QUASIREGULAR MAPPINGS

須川 敏幸

京都大学大学院・理学研究科

1996/11/22 於 東工大

この講演の目的は Järvi-Vuorinen による論文 “Uniformly perfect sets and quasiregular mappings” (to appear in J. London Math. Soc.) の紹介である。一般次元の Euclid 空間内の一様完全集合についての一般的性質と quasiregular 写像との関わりについて述べられている論文であり非常に興味深い結果を多く含んでいる。

用語や標準的な記号については大竹氏・中西氏による優れた論説「Quasiregular 写像の基礎」があるのでそちらを参照して頂きたい。(特に、中西氏による第2部の記号に出来るだけ合わせるようにした。)

## 1. 記号および定義

ここでは必要最小限の記号や定義を用意しておく。 $x \in \mathbb{R}^n$  と  $r > 0$  に対して

$$B^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| < r\}, B^n(r) = B^n(0, r), B^n = B^n(1)$$

と定める。また以下では Euclid 距離を  $d(x, y) = |x - y|$  で表し  $\mathbb{R}^n$  の 1 点コンパクト化  $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  の弦距離及び球面距離をそれぞれ  $q, \sigma$  で表す。具体的には

$$q(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)}}$$

で  $\sigma$  は  $dq(x) = \frac{|dx|}{(1 + |x|^2)}$  から定まる測地的距離である。なお、これらによる集合間の距離や集合の直径などを例えば  $d(E, F)$  や  $q(E)$  などと表す。また、

$$B_q(z, r) = Q(z, r) = \{w \in \overline{\mathbb{R}^n}; q(z, w) < r\}, B_\sigma(z, r) = \{w \in \overline{\mathbb{R}^n}; \sigma(z, w) < r\}$$

と定め、また  $0 < r < s$  として

$$A_d(x, r, s) = B^n(x, s) \setminus \bar{B}^n(x, r), A_q(z, r, s) = Q(z, s) \setminus \bar{Q}(z, r)$$

とする。 $\overline{\mathbb{R}^n}$  内の領域  $D$  でその補集合が 2 個の連結成分からなるようなものを円環領域 (ring domain, shell domain) と呼ぶが、これらは標準的なもので、それぞれの

modulus は

$$\text{mod}(A_d(x, r, s)) = \log \frac{b}{a}, \text{mod}(A_q(z, r, s)) = \log \frac{s\sqrt{1-r^2}}{r\sqrt{1-s^2}}$$

である。

定義 1.1.  $\alpha > 0$  を定数とする。2 点以上を含む閉集合  $E \subset \mathbb{R}^n$  が  $\alpha$ -一様完全とは  $E$  を分離する任意の円環領域  $D$  に対して  $\text{mod}D \leq \alpha$  が成り立つことを言う。

定義 1.2.  $s, t > 0$  とし  $E \subset \mathbb{R}^n$  を空でない集合とする。 $x \in \mathbb{R}^n$  が  $E$  の  $(s, t)$ -強極限点であるとは任意の弦円環領域  $A = A_q(x, r_1, r_2)$  で  $\text{mod}A > s$  かつ  $r_1 < t$  について  $A \cap E \neq \emptyset$  であることをいう。

これについて次の補題は基本的である。

補題 1.1.  $E$  を 2 点以上含む  $\mathbb{R}^n$  の閉集合とする。

- (1)  $E$  が  $\alpha$ -一様完全ならば  $E$  の各点は  $E$  の  $(\alpha, q(E)/4)$ -強極限点である。
- (2)  $c \in (0, 4]$  に対し  $E$  の任意の点が  $E$  の  $(s, cq(E))$ -強極限点ならば、 $E$  は  $\alpha$ -一様完全である。ただしここに  $\alpha$  は  $s, c, n$  にのみ依存する正定数である。

$\beta$  を正定数とする。集合  $E$  の  $\beta$ -次元 Hausdorff content  $A^\beta(E)$  とは

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^\beta; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \right\}$$

によって定まる数である。 $H^\beta(E)$  を通常の  $\beta$ -次元 Hausdorff 測度とすると次のことが知られている。

$$A^\beta(E) \leq H^\beta(E),$$

$$A^\beta(E) = 0 \iff H^\beta(E) = 0.$$

従って、少なくとも Hausdorff 次元の計算や評価には有効な量である。

## 2. LITTLEWOOD の定理の一般化

この節では次の定理を紹介する。

定理 2.1.  $E \subset \mathbb{R}^n$  を閉集合とし  $\infty$  が  $E$  の  $(s, t)$ -強極限点であるとする。 $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E$  を  $K$ - $qr$  写像とすると  $n, K, s, t$  にのみ依存する定数  $C_1, C_2$  が存在して

$$|f(x)| \leq C_1 \max\{1, |f(0)|\} \left( \frac{1+|x|}{1-|x|} \right)^{C_2}$$

が任意の  $x \in B^n$  に対して成り立つ。

証明から分かることだが、この定理は次の Littlewood による定理の  $k = 0$  の場合の拡張になっている。

定理 2.2 (Littlewood(1924)). 整数  $k \geq 0$  と定数  $c > 1$  及び複素数の無限列  $w_1, w_2, \dots$  で  $|w_n| = r_n$  としたとき  $r_1 > 0, r_n < r_{n+1} < cr_n, r_n \rightarrow \infty$  を満たすものが与えられているとすると定数  $A(k)$  が存在して次のことが成り立つ。  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  が単位円板上で正則でしかも  $f$  は各  $w_n$  を  $k$  回より多く値として取らないとすると

$$M(\rho, f) = \max\{|f(z)|; |z| = \rho\} < mA(k)(1 - \rho)^{-h}$$

である。ここに  $h = cA(k)(r_1 + 1), m = \max\{1, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_k|\}$  とする。

この定理には Rickman による Schottky 型定理 (中西氏“ Quasiregular 写像論入門 ” p.72, 9 行目の式) と Schwarz の補題の qr 版から得られる次の形の結果を用いるのが鍵である。

定理 2.3. 整数  $p = p(n, K) \geq 3$  を Rickman による Picard 型定理におけるものとし  $K$ - $qm$  写像  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が相異なる点  $a_1, \dots, a_p$  を取らないとすると  $n, K$  及び  $\beta := \frac{1}{4} \min\{\sigma(a_i, a_j); i \neq j\}$  にのみ依存する単射連続写像  $\omega : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  が存在して

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \omega(\rho(x, y)) \quad \text{for all } x, y \in B^n$$

が成り立つ。ただしここに  $\rho$  は  $B^n$  の双曲距離である。また、 $\omega$  は  $\omega(t) \leq At^{\frac{1}{K}}$  となるように取れる。

$G \subset \mathbb{R}^n$  を領域として  $k_G(x) = \frac{|dx|}{d(x, \partial G)}$  とする。この連続計量は擬双曲計量と呼ばれる。この Littlewood の定理の拡張から次の結果が得られる。

定理 2.4.  $G, G'$  を  $\mathbb{R}^n$  の真部分領域とし  $f : G \rightarrow G'$  を  $qr$  写像とする。  $\partial G'$  が一様完全ならば  $f : (G, k_G) \rightarrow (G', k_{G'})$  は一様連続である。

### 3. 一様完全集合の特徴付け

一様完全集合については 2 次元の場合には様々な特徴付けが知られているが、高次元の場合についても次のような同様の特徴付けが得られる。

定理 3.1.  $E \subset \mathbb{R}^n$  を少なくとも 2 点を含む閉集合とする。このとき以下の条件は互いに同値であり現れる定数は互いに他の定数のみで評価出来る。

- (1) ある  $\alpha > 0$  に対して  $E$  は  $\alpha$ -一様完全である。
- (2) ある定数  $\beta > 0, C_1 > 0$  が存在して

$$A^\beta(\bar{B}^n(x, r) \cap E) \geq C_1 r^\beta$$

が任意の  $x \in E \cap \mathbb{R}^n$  及び  $r \in (0, d(E))$  に対して成り立つ。

- (3) ある定数  $C_2$  が存在して

$$\text{cap}(x, E, r) := \text{cap}(B^n(x, 2r), \bar{B}^n(x, r) \cap E) \geq C_2$$

が任意の  $x \in E \cap \mathbb{R}^n$  及び  $r \in (0, d(E))$  に対して成り立つ。

注意 3.1. ここで特に $\beta$ は $\beta \geq \frac{\log 2}{\log(5\sqrt{ne^\alpha+2})}$ に取れることが証明から分かる。従って、特に $E$ が $\alpha$ -様完全ならばその Hausdorff 次元は下から $\frac{\log 2}{\log(5\sqrt{ne^\alpha+2})} \geq \frac{\log 2}{\alpha + \log(5\sqrt{n+2})}$ で押さえられることが分かる。

相異なる 4 点  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$|a, b, c, d| = \frac{|a - c| \cdot |b - d|}{|a - d| \cdot |b - c|}$$

と定義する。

定理 3.2.  $E \subset \mathbb{R}^n$  を 3 点以上含む閉集合とすると次の条件は互いに同値であり現れる定数は互いに他の定数のみで評価出来る。

- (1)  $E$  は  $\alpha$ -様完全。
- (2) 任意の  $a, b \in E$  と  $w \notin E$  に対してある  $c \in E$  が存在して  $1/C_1 \leq |a, b, c, w| \leq C_1$  が成り立つ。
- (3) ある  $b \in E$  が存在して任意の  $a \in E$  及び  $w \notin E$  に対して  $c \in E$  が存在して  $1/C_2 \leq |a, b, c, w| \leq C_2$  が成り立つ。
- (4) 定数  $s, t > 0$  で次を満たすものが存在する。 $E$  内の任意の 3 点  $(b, c, d)$  に対して集合  $\{|a, b, c, d|; a \in E\}$  は 0 を  $(s, t)$ -強極限点に持つ。

#### 4. 例

論文ではいくつか例が挙げられているがここでは次の結果を紹介しておこう。証明には Mañe-de Rocha の有理関数の Julia 集合の様完全性についての論文の議論を用いる。

定理 4.1.  $\Gamma$  を  $\mathbb{R}^n$  に作用する非初等的有限生成 Klein 群とすると極限集合  $L(\Gamma)$  は様完全である。

系 4.2. 任意の非初等的 Klein 群の極限集合の Hausdorff 次元は正である。