UNIFORM PERFECTNESS OF LIMIT SETS OF KLEINIAN GROUPS

須川 敏幸　　（京都大学大学院・理学研究科）

この講演では非初等的 Klein 群の極限集合が一様完全 (uniformly perfect) であるための十分条件について述べる。初等的 Klein 群の極限集合については何もすべきことはないので、以下では考える群は全て非初等的であるとする。（有限生成）Schottky 群の極限集合の一様完全性については既に Pommerenke が論文[3] で、そしてその後一般の有限生成 Klein 群については Pommerenke [4] で成り立つことが示されている。その後ちょっとした注意により解析的有限な Klein 群についても極限集合が一様完全であることが示されている（例えば Canary [1] 参照）。この講演では無限生成の場合も含めて極限集合が一様完全であるための十分条件を与える。

まず G を Klein 群とし $\mathit{\Lambda}(G), \mathit{\Omega}(G)$ をそれぞれその極限集合 (limit set) 及び不連続領域 (region of discontinuity) とする。$X = X_G = \mathit{\Omega}(G)/G$ を不連続領域を G の作用で割って自然に得られる（連結とは限らない）hyperbolic orbifold とし $\pi : \mathit{\Omega}(G) \to X$ を標準射影とする。X 上の分岐点全体の集合を Bとし $X^\circ = X \setminus B$とおく。また Xの分岐の構造を忘れて得られるリーマン面を$\widehat{X}$と書くことにする。

“ hyperbolic ”というのは X_0を Xの連結成分として $\mathit{\Omega}_0$を$\pi^{-1}(X_0)$ の成分の一つとするとき、$q : \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im} z > 0\} \to \mathit{\Omega}_0$を正則な普遍被覆写像として $p = \pi \circ q : \mathbb{H} \to X_0$ とする。（一般にこのように $\mathbb{H}$からの Galois 被覆写像 p の像として得られる分岐点付きのリーマン面は (connected) hyperblic orbifold と呼ばれる。）このとき、$\mathbb{H}$ の Poincaré metric $\rho_{\mathbb{H}}(z) = \frac{|dz|}{2\mathrm{Im} z}$を p で project して X_0上の metric ρ_{X_0}が得られる。すなわち、ρ_{X_0} は分岐点において cone singularity を持ちそれ以外では滑らかな$\rho_{\mathbb{H}} = p^*(\rho_{X_0})$ を満たす metric である。これが各成分ごとに定まるので全体の metric ρ_Xが自然に定まる。これが X 上の hyperbolic metric と呼ばれるものである。X 上の曲線βに対してその双曲的長さ $\ell_X(\beta)$ が

$$\ell_X(\beta) = \int_\beta \rho_X(z)|dz|$$

により定義される。また、$\mathit{\Gamma}_{X_0} = \{\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) : p \circ \gamma = p\}$ とおけばこれは$\mathit{\Omega}_0$の Fuchs 群模型$\mathit{\Gamma}_{\mathit{\Omega}_0} = \{\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) : q \circ \gamma = q\}$ を正規部分群として含む Fuchs 群で orbifold

X_0の Fuchs 群模型と呼ぶ。

そこで次のような定義を行う。

$$\mathcal{C}_{X_0} = \{[\alpha] : \alpha \text{は } X_0^\circ \text{内の非自明な閉曲線}\},$$

$$\mathcal{C}^*_{X_0} = \{[\alpha] \in \mathcal{C}_{X_0} : \alpha \text{は} \Gamma_{X_0} \text{の双曲型元により被覆される}\}.$$

ここで $[\alpha]$ は $X_0^\circ = X_0 \setminus B$における自由ホモトピー類を表す。そこでさらに

$$L_{X_0} = \inf_{[\alpha]\in\mathcal{C}_{X_0}} \ell_{X_0}[\alpha], L^*_{X_0} = \inf_{[\alpha]\in\mathcal{C}^*_{X_0}} \ell_{X_0}[\alpha]$$

と定義する。（空集合に対する inf は$+\infty$ と定義しておく。）このとき X_0が解析的に有限型であれば $L^*_{X_0}$が正になることに注意しておこう。また容易に分かるように次の式も成り立つ。

$$L^*_{X_0} = \inf_{\gamma\in\Gamma_{X_0}:\text{hyperbolic}} \lambda_\gamma,$$

ここにλ_γはγの translation length を表す。すなわち$\lambda_\gamma = 2\cosh^{-1}(\mathrm{tr}\gamma)$ である。さらに Xに対して

$$L_X = \inf L_{X_0}, L^*_X = \inf L^*_{X_0}$$

とおく。ここに inf は Xの連結成分 X_0全体にわたって取る。

定義 1. 一般に Xを (連結とは限らない）hyperbolic orbifold とする。$L_X > 0$である時 Xは modulated と呼ぶ。また $L^*_X > 0$である時 Xは Lehner 型とここでは呼んでおくことにしよう。

注意 1. Xが$\hat{\mathbb{C}}$の開集合であるときは Xが modulated であるとき X^cが一様完全 (uniformly perfect) であると言う。また、Xが Lehner 型であるための必要十分条件は X上の可積分な正則 2 次微分の空間が双曲的有界な正則 2 次微分の空間に含まれることと同値である [2]。

定理 1. **非初等的** Klein **群** G **について次の不等式が成り立つ。**

$$L_{\Omega(G)} \geq L^*_{X_G}.$$

特に X_G**が** Lehner **型であれば**$\Lambda(G)$ **は一様完全である。**

注意 2. この定理の系として容易に解析的有限な Klein 群の極限集合が一様完全であることが分かる。

References

1. Canary, R. D. The Poincaré metric and a conformal version of a theorem of Thurston, *Duke Math. J.*, **64** (1991), 349–359.
2. Niebur, D. and Sheingorn, M. Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 239–258.
3. Pommerenke, C. Uniformly perfect sets and the Poincaré metric, *Ark. Math.*, **32** (1979), 192–199.
4. Pommerenke, C. On uniformly perfect sets and Fuchsian groups, *Analysis*, **4** (1984), 299–321.