UNIFORM PERFECTNESS OF JULIA SETS OF RATIONAL FUNCTIONS

須川 敏幸　　（京都大学大学院・理学研究科）

この講演では次数 2 以上の有理函数の Julia 集合の一様完全性について述べる。以下では特に断らない限り考える有理函数は全て次数 $d \geq 2$ であるとする。双曲的な有理函数については Pommerenke [3] がその一様完全性を証明していたが、一般の有理函数については Mañé-da Rocha [2] と Hinkkanen [1] により独立に証明された。また、超越整函数については一様完全でない例が[1] に remark されている。ただ、いずれの証明も一様完全でないとするといくらでも modulus が大きくなる essential な円環の列が取れることから矛盾を導いており、具体的な一様完全性の評価は与えられていない。例えば、次のような結果も成り立つので具体的な一様完全性の評価を行うことは意味があるものと考えられる。

定理 1. **リーマン球面**$\widehat{\mathbb{C}}$**の開集合**Ω**の境界を分離する円環領域の** modulus **の上限を** M_Ω**で表せば** $E = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$**の** Hausdorff **次元に関して次の評価が成り立つ。**

$$\text{H-dim}(E) \geq \frac{\log 2}{\log(2e^{M_\Omega} + 1)} \geq \frac{\log 2}{M_\Omega + \log 3}.$$

さらに領域定数 L_Ωを次のように定義する。

$$L_\Omega = \inf \ell_\Omega[\beta],$$

ただしここに inf はΩ内の全ての可縮でない閉曲線βの自由ホモトピー類 $[\beta]$ 全体にわたって取り、$\ell_\Omega[\beta]$ はその測地線の双曲的長さであるとする。これについて次の評価が成り立つことは既にこれまでの学会発表の通りである。

$$L_\Omega \leq \frac{\pi^2}{M_\Omega} \leq L_\Omega e^{L_\Omega}.$$

そこで $M_\Omega < \infty (\Leftrightarrow L_\Omega > 0)$ であるような閉集合 $E = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$を一様完全であるという。

さて $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$を次数 $d\geq 2$ の有理函数とする。その Julia 集合及び Fatou 集合をそれぞれ J_f, Ω_fと書くことにしよう。以下では L_{Ω_f}の下からの具体的評価を与えることが目標である。fの critical point は重複度も込めて $2d-2$ 個あることが知られているが、critical point を含む Fatou 集合の連結成分を全て列挙してそれらを $U_1,\dots,U_s$とし よう。$W_j=f(U_j), C_j=\{u\in U_j : df(u)=0\}$ とおく。そこで $v_1,v_2\in f(C_j)(v_1\neq v_2)$ 及び $v\in f(C_j)$ に対して $\mathcal{S}(v_1,v_2)$ を v_1,v_2を通る W_j内の可縮な閉曲線で fによる適当な持ち上げが∂U_jを分離するようなもの全体のなす集合、及び $\mathcal{T}(v)$ を vを essential に 2 回以上通る W_j内の可縮な閉曲線で fによる適当な持ち上げが∂U_jを分離するようなもの全体のなす集合とする。ここで閉曲線$\beta:\mathrm{S}^1\to W_j$が点 vを essential に 2 回以上通るとは、ある 2 点 $a,b\in\mathrm{S}^1(a\neq b)$ で$\beta(a)=\beta(b)=v$なるものがあって、$\mathrm{S}^1\setminus\{a,b\}$の連結成分を I_1,I_2とするとき$\beta|_{\bar{I}_1},\beta|_{\bar{I}_2}$がともに W_j内の可縮でない閉曲線になっていることであるとする。さらに各 W_jでの双曲計量での曲線βの長さを $\ell_{W_j}(\beta)$ と表す時、

$$k_j(v_1,v_2)=\inf_{\beta\in\mathcal{S}(v_1,v_2)}\ell_{W_j}(\beta),\quad k'_j(v)=\inf_{\beta\in\mathcal{T}(v)}\ell_{W_j}(\beta),$$
$$k_j=\min_{v_1,v_2\in f(C_j);v_1\neq v_2}k_j(v_1,v_2),\quad k'_j=\min_{v\in f(C_j)}k'_j(v)$$

と定める。ただし $\#f(C_j)=1$ ならば $k_j=\infty$ と定めておく。ここで $d_{W_j}(v_1,v_2), \iota_{W_j}(v)$ をそれぞれ W_jにおける双曲距離及び双曲単射半径とするとき

$$k_j(v_1,v_2)\geq 2d_{W_j}(v_1,v_2),\quad k'_j(v)\geq 4\iota_{W_j}(v)$$

だから特に $k_j>0, k'_j>0$ であることに注意しておこう。最後に fの Herman 環を $A_1,\dots,A_t$とすれば次の結果を得る。

定理 2.

$$L_{\Omega_f}\geq\min\{k_1,\dots,k_s,k'_1,\dots,k'_s,L_{A_1},\dots,L_{A_t}\}.$$

系.

$$L_{\Omega_f}\geq\min_{v_1,v_2,v\in f(C);v_1\neq v_2}\{2d_{\Omega_f}(v_1,v_2),4\iota_{\Omega_f}(v),L_{A_1},\dots,L_{A_t}\}.$$

特に J_fは一様完全である。

References

1. Hinkkanen, A. Julia sets of rational functions are uniformly perfect, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **113** (1993), 543–559.
2. Mañé, R. and da Rocha, L. F. Julia sets are uniformly perfect, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **116** (1992), 251–257.
3. Pommerenke, C. On uniformly perfect sets and Fuchsian groups, *Analysis*, **4** (1984), 299–321.