被覆写像と一様完全性

須川 敏幸
京都大学・理学部

July 14, 1997

1. 序

一様完全集合の概念は通常の完全集合の概念を強めたもので、次のように何でもないものである。つまり、距離空間 (X, d) の 2 点以上含む閉集合 Eが**一様完全** (uniformly perfect) であるとは、ある定数 $0 < c < 1$ が存在して任意の $a \in E$及び $0 < r < \mathrm{diam}(E)$ に対して

$$E \cap \{x \in X; cr < d(x, a) < r\} \neq \emptyset$$

が成り立つことである。もちろん、一様完全ならば完全 (perfect) である。この何でもない条件が文献に表立って登場するのは筆者の知る限り Beardon-Pommerenke [2] が最初であると思われる。少なくとも、複素平面上の集合に関して一様完全性と他の様々な条件との関係が主に Pommerenke によって明らかにされると、他の多くの研究者もこの性質について調べるようになってきた。特に Klein 群の極限集合や有理函数の Julia 集合など“ 良い ”自己相似性を持つような集合に関しては一様完全性が期待されるわけだが、実際にこれまでにかなり緩やかな条件の下でそのようなことが知られてきている。(cf. [10], [12].)

もともと一様完全という概念は単連結領域に関してある種の良い性質が得られていたとしてそれがどの程度の領域に拡張できるか、という問題意識において出てきた概念である。従って、この概念を持ち出すメリットはおおまかに言えば次の“ 原理 ”とも言うべきものである：

『単連結領域について成り立つことは、だいたい modulated な領域についても成り立つ』。

もちろん、明らかに多重連結領域だとコケる性質も多いのでその辺は多少の嗅覚が必要となる。

高次元 Euclid 空間の閉集合についても Järvi-Vuorinen [7] によって詳しく調べられているが、それ以外の空間についてはまだほとんど手が着けられていないのが現状である。複素平面あるいはリーマン球面内の閉集合について一様完全性が特によく調べられているのは、一様完全性がその補集合である開集合についての性質に読み替えられるからで、そのようにすればこの概念をリーマン面の性質として特徴付けることも可能である。このようなリーマン面を modulated と呼ぶことにしよう。例えば

、リーマン面 Rが modulated とは Rに essential (incompressible) に含まれる円環領域の modulus が有界であることである、と言える。従って、特にこの概念が擬等角写像によって不変であることも分かる。

次に不分岐被覆については下の面が modulated ならば上の面もそうである、ということが言えることが容易に分かるのだが、応用上は分岐被覆についてどの程度のことが言えるのかが重要である。従ってこの講演ではこのような分岐に関して一様完全性が面にどのように伝わっていくのかについて調べ、その結果を用いて有限生成 Klein 群の極限集合や有理函数の Julia 集合が一様完全であることの別証明が与えられることを説明したい。

このアブストラクトの構成であるが、2 節では一様完全集合の基本的性質について述べ、3 節では被覆について考察する。さらに 4 節においてこれらの応用について述べる。

2. 一様完全性の定義と基本的性質

以下では複素 1 次元の場合のみを考える。Eをリーマン球面内の 3 点以上を含むコンパクト集合とし Dをその補集合とする。すると仮定より Dは双曲的開集合となり Gauss 曲率-4 の双曲計量$\rho_D = \rho_D(z)|dz|$ が自然に定義される。$\mathcal{C}_D$を D内の可縮でない閉曲線の自由ホモトピー類全体としその長さを $\ell_D[\alpha] = \inf_{\alpha' \in [\alpha]} \ell_D(\alpha')$（ここに $\ell_D(\alpha') = \int_{\alpha'} \rho_D(z)|dz|$）により定める。さらに

$$L_D = \inf_{[\alpha] \in \mathcal{C}_D} \ell_D[\alpha]$$

としておこう。

同様にして同じ連結成分に属する任意の 2 点 $a, b \in D$に対してその双曲距離 $d_D(a, b)$ をその 2 点を結ぶ D内の曲線の長さの下限として定義する。違う成分に属する 2 点についてはその双曲距離は$+\infty$ と約束しておく。任意の点 $a \in D$に対してその点を中心とする双曲円板 $\{z \in D; d_D(a, z) < r\}$ を考えてそれが単連結となるような rの上限を a における Dの単射半径と呼び $\iota_D(a)$ で表すことにする。

次に $\mathcal{A}_D, \mathcal{A}_D^\circ$をそれぞれ D内の essential な (境界を分離する) 円環領域, “ 円い ”円環領域全体のなす集合とする。ここで“ 円い ”とは $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}$ という形の円環のことで $a \in \mathbb{C}$ は必ずしも Eに入っていなくてもよい。そこで

$$M_D = \sup_{A \in \mathcal{A}_D} m(A), \quad M_D^\circ = \sup_{A \in \mathcal{A}_D^\circ} m(A)$$

とする。ここに $m(A)$ は A の modulus でここでは A が上記の“ 円い ”円環と双正則同値な時に $m(A) = \log r_2/r_1$と定義しておく。

以下、簡単のため $\infty \in E$としておこう。このとき$\delta_D(z) = \mathrm{dist}(z, E)$ とおくことにするとよく知られているように$\rho_D(z)\delta_D(z) \le 1$ であり、Dが単連結ならば$\frac{1}{4} \le \rho_D(z)\delta_D(z)$ も成り立つ。Dの各連結成分 D_0に対して $f = f_{D_0} : \mathit{\Delta} \to D_0$を単位円板からの正則な普遍被覆写像とし、$\mathit{\Gamma}_{D_0}$を fの被覆変換群（従って Fuchs 群）とする。すると以下の条件は互いに同値である。

(1) Eは球面距離に関して一様完全。

(2) $E \setminus \{\infty\}$ は Euclid 距離に関して一様完全。
(3) $L_D > 0$.
(4) $\inf_{z \in D} \iota_D(z) > 0$.
(5) $M_D < \infty$.
(6) $M_D^\circ < \infty$.
(7) $\inf_{z \in D} \rho_D(z)\delta_D(z) > 0$.
(8) $f = f_{D_0}$の Schwarz 微分 $S_f = (f''/f')' - \frac{1}{2}(f''/f')^2$についてそのノルム $\|S_f\|_\Delta = \sup_{\zeta \in \Delta}(1-|\zeta|^2)^2|S_f(\zeta)|$ が成分 D_0によらずに有界。
(9) $\inf_{D_0 \sqsubset D} \inf_{\gamma \in \Gamma_{D_0} \setminus \{\mathrm{id}\}} |\mathrm{tr}\gamma| > 2$.
(10) 各Γ_{D_0}の基本領域として境界が quasicircle であるものが取れてその歪曲度 (dilatation) が D_0によらずに有界に取れる。(M. J. González [5].)
(11) Dは strong barrier を持つ。つまり、D上のある正値優調和函数 s が存在し、ある定数$\varepsilon > 0$ に対し

$$\Delta s + \frac{\varepsilon s}{\delta_D(z)^2} \leq 0$$

が weak sense で成り立つ。(Ancona [1].)
(12) ある定数 $c > 0$ が存在して任意の $a \in E$及び $0 < r < \mathrm{diam}(E)$ について

$$\mathrm{Cap}(E \cap B(a, r)) \geq cr$$

が成り立つ。ただしここにCap は対数容量で $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leq r\}$ とする。(Pommerenke [9].)
(13) 各 $f = f_{D_0} : \Delta \to D_0$が BMO 写像（つまりBMO$(D_0)$ の各元の fによる引き戻しがBMO(Δ) に含まれる）でありその引き戻しの作用素ノルムが D_0 によらずに有界に取れる。(Osgood [8], Gotoh [6].)

このように一様完全性の特徴付けは数多くある。これ以外にもたくさんあるが、それについては[13] 及びその参照文献をご覧頂きたい。

これらのうち特に性質 (3),(4) 及び (5) は一般の双曲的リーマン面に対しても意味を持ち、従ってこれらの性質を持つリーマン面を modulated と呼ぶことにしておこう。（山下氏[14] はこの性質を finite type と呼んでいるがここでは[4] に従ってこの用語を用いる。）なお、以下では単にリーマン面と言うときはつねに連結なものを考える。（連結でないものは連結成分ごとに考えればよく、以下で評価の際の定数が他の定数のみに依存して取れるということに常々注意しておればこのように仮定して差し支えない。）

さて、一様完全集合または modulated なリーマン面については例えば以下のようなことが分かっている。

Theorem 2.1 (Järvi-Vuorinen [7], **Sugawa** [13]**).** コンパクト集合 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$に対し

て $D=\widehat{\mathbb{C}}\setminus E$とすればハウスドルフ次元について

$$\text{H-dim}E \geq \frac{\log 2}{\log(2e^{M_D^\circ}+1)} \geq \frac{\log 2}{M_D^\circ+\log 3}$$

が成り立つ。

Theorem 2.2 (Fernández [3], **Fernández-Rodríguez** [4], **Sugawa** [11]**).** Rを有限種数 gを持つ双曲面積有限でないmodulatedなリーマン面とすると L_R及び gにのみ依存する定数$\beta=\beta(L_R,g)>0$が存在して R上のLaplace-Beltrami作用素に関するスペクトルの最小値 $b(R)$ について $b(R)\geq\beta$と評価される。

Rの双曲面積が有限であるための必要十分条件は Rが等角的に有限であることである。つまりコンパクトリーマン面から高々有限個の点を抜いたような面であるということである。

この定理の平面領域の場合、すなわち $g=0$ の場合が Fernández らの結果である。

また、Rの収束指数$\delta(R)$ は Rの Fuchs 群模型$\mathit{\Gamma}<\text{Möb}(\mathit{\Delta})$ に対して

$$\sum_{\gamma\in\mathit{\Gamma}}(1-|\gamma(0)|)^\delta<\infty$$

となる定数$\delta>0$の下限で定義されるが、これと $b(R)$について次の Elstrodt-Patterson -Sullivan の定理が知られている。

$$b(R)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{if } 0\leq\delta(R)\leq\frac{1}{2},\\ \delta(R)(1-\delta(R)) & \text{if } \frac{1}{2}\leq\delta(R)\leq 1.\end{cases}$$

従って、先の定理の仮定の下で$\delta(R)<1$であることが分かる。

これらの結果からも分かるように、一様完全性を特徴付ける定数を具体的に評価することが応用上重要であると考えられる。例えば、Klein 群の極限集合や有理函数の Julia 集合の一様完全性についてはこれまでは背理法などにより証明されることが多く、それでは質的な結果しか得られないことが多かった。以下で述べる方法はある程度量的な結果を導くので有用であると考えられる。

3. 分岐被覆と一様完全性

まず最初に簡単のために $f:U\to W$を双曲的リーマン面の正則な不分岐被覆写像とする。(以下では“ 正則な ”という形容詞は省略する。被覆と言えば断らない限りつねに正則なものを考えることにする。）一般に連続写像 $f:U\to W$は$\alpha\mapsto f_*\alpha=f\circ\alpha$により閉曲線を閉曲線に写すが、これにより閉曲線の自由ホモトピー類について自然な写像 $f_*:\mathcal{C}_U\to\mathcal{C}_W$が誘導される。今は写像 fが不分岐被覆なので Wでのホモトピーが Uまでリフトされるのでこのことから f_*は単射となる。fは双曲計量に関して局所等距離であるから、$\ell_U(\alpha)=\ell_W(f_*\alpha)$ となることに注意するとこれらの考察から次の結果を得る。

Proposition 3.1. $f : U \to W$を正則な不分岐被覆写像とすると $L_U \geq L_W$が成り立つ。従って、特にWが *modulated* ならばUも *modulated* である。

では、次に分岐被覆について考えてみよう。一般には Ahlfors 写像のように単連結でないリーマン面から単位円板への分岐被覆が存在するので上記の命題は無条件では成立しない。このような場合分岐点が重要な役割をするであろうと予想されるが、実際その通りである。$f : U \to W$を双曲的リーマン面の分岐被覆とする。すなわち、任意の点$a \in W$に対してその単連結かつ連結な近傍Vが存在して$f^{-1}(V)$の各連結成分V_jに対してある等角写像$\varphi : V_j \to \Delta$及び$\psi : V \to \Delta$と自然数kが存在して$\psi(a) = 0$かつ$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(\zeta) = \zeta^k$が成り立つとする。（この定義だと、$f$は必ずしも有限葉数でなくてもよい。）$C$を$f$の分岐点全体とする。つまり$C = \{x \in U; df(x) = 0\}$とする。すると仮定より分岐値の集合$f(C)$は$W$の離散閉集合となる。そこで$f(C)$の異なる 2 点$v_1, v_2$及び任意の点$v$に対して$W$の曲線族$\mathcal{S}(v_1, v_2), \mathcal{T}(v)$をそれぞれ以下の条件 (1), (2), (3) および (1), (2)', (3) を満たす閉曲線$\beta : \mathrm{S}^1 \to W$全体として定義する。

(1) βはWにおいて可縮である。
(2) βはv_1, v_2を通る。
(2)' βはvを本質的に 2 回以上通る。正確に言えばS^1の閉部分区間Iでその端点でのβの値がvでしかも$\beta|_I$がWにおいて非自明であるものが存在する。
(3) U内の非自明な閉曲線αが存在して$f_* \alpha = \beta$となる。

これに対してさらに

$$a(v_1, v_2) = \inf_{\beta \in \mathcal{S}(v_1, v_2)} \ell_W(\beta), \quad b(v) = \inf_{\beta \in \mathcal{T}(v)} \ell_W(\beta),$$

$$a = \inf_{v_1 \neq v_2 \in f(C)} a(v_1, v_2), \quad b = \inf_{v \in f(C)} b(v)$$

とおく。すると、このとき次の結果が成り立つ。

Lemma 3.2 ([10])**.** U内の非自明な閉曲線αの像$f_* \alpha$がWにおいて可縮ならば実は

$$\ell_U(\alpha) \geq \min\{a, b\}$$

が成り立つ。

U内の非自明な閉曲線αの像がもしWで可縮でなければ$[f_* \alpha] \in \mathcal{C}_W$であるのだから$\ell_U[\alpha] \geq L_W$が成り立つ。従って、上の補題と合わせて次の結論を得る。

Theorem 3.3. $f : U \to W$を正則な分岐被覆とすると次の評価が成り立つ。

$$L_U \geq \min\{L_W, a, b\}.$$

補題の証明は非常に易しい。ポイントはWの普遍被覆$\pi : \Delta \to W$を考えてβをその上に持ち上げて考えることである。仮定からこれは閉曲線に持ち上がるはずであるが、それは必ず$\pi^{-1}(f(C))$の点を少なくとも 2 点以上囲んでいなくてはいけない。（実際、そうでなければβは$W \setminus f(C)$においてある 1 点かまたは$f(C)$の 1 点と自由ホモトピックとなり、そのホモトピーはUにリフト出来るからUにおいて 1 点とホモ

トピックとなって仮定に反してしまう。）従って、あとはβのリフトの適当な部分区間を端点を同じくする双曲線分で置き換えて$\pi^{-1}(f(C))$の点を通るようにしてやることを考える。この操作において部分区間は置き換えた双曲線分と$\Delta \setminus \pi^{-1}(f(C))$においてホモトピックであるように出来て、しかも双曲線分は測地線だから置き換えて得られた曲線の長さの方が短くなる。このような操作を少なくとも 2 度行うことが出来るので得られた曲線を再びπで落としてやればそれらは$\mathcal{S}(v_1, v_2)$または$\mathcal{T}(v)$に入ることが分かる。（置き換えて得られた曲線は$\pi^{-1}(f(C))$の異なる 2 点を通ることになるが、それらのπによる像が異なる時には$\mathcal{S}(v_1, v_2)$に属し、一致する時には$\mathcal{T}(v)$に属することになる。）

ここで任意の$\beta \in \mathcal{S}(v_1, v_2)$に対して明らかに$\ell_W(\beta) \geq 2d_W(v_1, v_2)$であるから$a(v_1, v_2) \geq 2d_W(v_1, v_2)$であることが分かる。特に$a(v_1, v_2) > 0$である。同様にして$\beta \in \mathcal{T}(v)$に対しては明らかに$\ell_W(\beta) \geq 4\iota_W(v)$であるから、$b(v) \geq 4\iota_W(v)$が成り立ち特に$b(v) > 0$であることが分かる。これより

$$a \geq 2 \inf_{v_1 \neq v_2 \in f(C)} d_W(v_1, v_2), \quad b \geq 4 \inf_{v \in f(C)} \iota_W(v)$$

であることが分かる。こちらの量の方が圧倒的に計算しやすいので便利であるが、この量だと評価が悪くなることがあることに注意してほしい。（例えば、分岐値が偶然Wにおいて近づくということはあり得る。）

4. Klein 群、複素力学系への応用

最後に先の結果の Klein 群論及び複素力学系の理論への応用を与えよう。

まず G を Klein 群として$\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$をその不連続領域，$\Lambda = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$を極限集合とする。以下 G は非初等的つまりΛが 3 点以上からなるとしてよい。$X = \Omega/G$ は双曲的な orbifold の構造を持つ。Xの分岐の構造を忘れたリーマン面（の高々可算和）を Rと書くことにすると、一般には Rは双曲的とはならないが、もし（全ての成分が）双曲的であるならば前節の結果が適用出来る。すなわち、$L_\Omega \geq \min\{L_R, a, b\}$と評価出来る。ここに$a, b$は前節における量を非連結な場合に適当に拡張して得られたものである。ここで、実際にはΛは孤立点を持たないことが知られているので、実は$\mathcal{C}_\Omega$の自然射影による像は Rの puncture のまわりを回ることはないことが分かる。従って、

$$L_R^* = \inf_{[\alpha] \in \mathcal{C}_R, \ell_R[\alpha] > 0} \ell_R[\alpha]$$

とおけば、実は

$$L_\Omega \geq \min\{L_R^*, a, b\}$$

であることが分かる。これより特に有限生成クライン群については Ahlfors の有限性定理により Rが有限個の等角的有限なリーマン面からなることが分かり、分岐値も有限個しかないので $L_\Omega > 0$であることが分かる。（Rが双曲的にならない時は残念ながらこの方法ではうまくいかない。orbifold の構造を残したまま考える必要がある。これについては[12] を参照のこと。）また、より一般に $L_R^* > 0$であって分岐値同士の双

曲距離及び分岐値での単射半径が下から押さえられるような Klein 群に対してはやはり $L_\Omega > 0$ であることが分かる。特に最初から torsion-free な Klein 群については a, b について考慮する必要はないことに注意せよ。

次に複素力学系について考える。fを有理函数で次数 $d \geq 2$ としよう。このとき逐次合成 f^nの族が正規となるような最大の開集合$\Omega = \Omega_f$を fの Fatou 集合と呼びその補集合 $J = J_f$を Julia 集合と呼ぶ。すると $f : \Omega \to \Omega$は proper な正則写像で、従って対応する成分ごとには分岐被覆写像であることが分かる。そこで、αをΩ内の非自明な閉曲線として$\alpha_n := (f^n)_*\alpha$ について考えていこう。まず、Schwarz-Pick の補題によって

$$\ell_\Omega(\alpha) \geq \ell_\Omega(\alpha_1) \geq \ell_\Omega(\alpha_2) \geq \cdots$$

となっていることに注意しておこう。さて、Sullivan の No Wandering Domains Theorem によってα_nはいずれは周期的な成分 Vに落ち着く。(Vが周期的とは、ある自然数 k があって $f^k(V) = V$となることである。周期成分 Vは実は次のようなものしかないことが分かっている。

(1) (超) 吸引的成分:この場合は f^kの逐次合成によってα_nは領域内の吸引的周期点 (f^kの吸引的固定点) に吸い込まれていくので、従っていずれはα_nは可縮になる。
(2) 放物的成分:この場合も f^kの逐次合成によってα_nは吸引的花弁と呼ばれる単連結領域に吸い込まれることが分かるので、同様にいずれは可縮になる。
(3) Siegel 円盤:この場合はこの領域自身が単連結なので当然α_nは可縮になる。
(4) Herman 環:この場合については何とも言えない。

従って、α_nについてどの n についてもΩで可縮にならないのならば、それは Herman 環に落ち込んでしかもα_nがその core curve に巻き付いている状態になっている。よってこの場合はこの Herman 環を A とすれば、$\ell_\Omega(\alpha) \geq \ell_\Omega(\alpha_n) \geq L_A$となっている。

一方、ある n についてα_nが可縮になっているとしよう。このような n で最小のものを考える。すると $\ell_\Omega(\alpha) \geq \ell_\Omega(\alpha_{n-1}) \geq \ell_\Omega(\alpha_n)$ であるから、あらためてα_{n-1}をαとすれば最初からαが非自明で$\beta = f_*\alpha$が自明になるという状況を考えてみればよい。これはまさに Lemma 3.2の状況になっている。従って、$\ell_\Omega(\alpha) \geq \min\{a, b\}$ であることが分かる。ここに a, b はやはり非連結な場合にも $\inf \emptyset = +\infty$ の約束の下に定義した量である。なお、ここで fの危点 (critical point) は重複度も込めて $2d - 2$ 個あることが知られているので、特に有限個であり従って、$a, b > 0$ であることが分かる。よって次の結果を得た。

Theorem 4.1. *次数 2 以上の有理函数 fの Fatou 集合について $L_{\Omega_f} \geq \min\{a, b, c\}$. ここに a, b は $f : \Omega \to \Omega$に対して前節で定義されたような量で、$c = \min L_A$とする。ここに A は fの Herman 環全体にわたってとる。*

なお、宍倉の定理により fの Herman 環 (の cycle) の個数は高々$d - 2$ 個であることが知られているので、特に $c > 0$ であることも分かる。これより J_fが一様完全で

あることも分かる。さらに系として次のことも分かる。

Corollary 4.2. 上と同じ仮定の下で、$L_{\Omega_f} \geq \min\{a', b', c\}$が成り立つ。ここに

$$a' = 2 \min_{v_1 \neq v_2 \in f(C)} d_\Omega(v_1, v_2), \quad b' = 4 \min_{v \in f(C)} \iota_\Omega(v), \quad c = \min_{A:\ Herman\ 環} L_A$$

でありCはΩに含まれるfの危点全体のなす集合である。

References

1. Ancona, A. On strong barriers and inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$, *J. London Math. Soc. (2)*, **34** (1986), 274–290.
2. Beardon, A. F. and Pommerenke, C. The Poincaré metric of plane domains, *J. London Math. Soc. (2)*, **18** (1978), 475–483.
3. Fernández, J. L. Domains with strong barrier, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **5** (1989), 47–65.
4. Fernández, J. L. and Rodríguez, J. M. The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **15** (1990), 165–183.
5. González, M. J. Uniformly perfect sets, Green's function, and fundamental domains, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **8** (1992), 239–269.
6. Gotoh, Y. On holomorphic maps between Riemann surfaces which preserve BMO, *J. Math. Kyoto Univ.*, **35** (1995), 299–324.
7. Järvi, P. and Vuorinen, M. Uniformly perfect sets and quasiregular mappings, *J. London Math. Soc.*, **54** (1996), 515–529.
8. Osgood, B. G. Some properties of f''/f' and the Poincaré metric, *Indiana Univ. Math. J.*, **31** (1982), 449–461.
9. Pommerenke, C. Uniformly perfect sets and the Poincaré metric, *Ark. Math.*, **32** (1979), 192–199.
10. Sugawa, T. An explicit bound for uniform perfectness of the Julia sets of rational maps, Preprint (1997).
11. Sugawa, T. On the bottom of spectra of open Riemann surfaces, In preparation (1997).
12. Sugawa, T. Uniform perfectness of the limit sets of Kleinian groups, Preprint (1997).
13. Sugawa, T. Various domain constants related to uniform perfectness, Preprint (1997).
14. Yamashita, S. Univalent analytic functions and the Poincaré metric, *Kodai Math. J.*, **13** (1990), 164–175.