SPECTRA OF OPEN RIEMANN SURFACES

須川 敏幸
京都大学・理学部

September 16, 1997

1. 序

双曲的リーマン面（あるいは、より一般にリーマン多様体）R 上の（計量による）Laplace-Beltrami 作用素$-\Delta$に関するスペクトルの分布は『音を聴いて面の幾何学的構造がどの程度分かるか』という観点からこれまで多くの人により研究されてきた。iso-spectral problem と呼ばれるのがそれである。スペクトルの分布はもちろん、面を変形すれば変化する。では、面の変形によって不変な量はないだろうか。例えば素数定理に対応するような形でスペクトルの漸近挙動によって次元や双曲面積（体積）が分かる、というタイプの結果が古くは Weil などにより知られてきた。

一方、これとはある意味で対極をなす、第一固有値と呼ばれる量$\lambda(R)$ がある。この量も様々な観点から調べられている。例えば、これは Reileigh quotient と呼ばれる次のような量の下限としても特徴付けることが出来る。

$$\lambda(R) = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(R)} \frac{\int_R |\nabla \varphi|^2 dVol}{\int_R \varphi^2 dVol}.$$

この値が正であるという性質はいかなる変形によって保たれるか、あるいはどのような時にこの値が正になるか。これについて双曲的リーマン面の場合に考えよう、というのが今回のお話のテーマである。

以下 Rは常に-4 の定曲率を持つ双曲計量（Poincaré 計量）$\rho_R = \rho_R(z)|dz|$ を持ったリーマン面とする。すなわち、単位円板からのある正則な普遍被覆写像 $p : \mathbb{D} \to R$ があって $p^*\rho_R(z) = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$ が成り立つとする。（定曲率-1 を好む人々も多いので色々な人の結果を比較したり使ったりする際には注意が必要である。自戒の念もこめて。）

この量$\lambda(R)$ の重要性は次の面の収束指数との関係を見ても分かるであろう。

Theorem 1.1 (Elstrodt-Patterson-Sullivan [6]).

$$b(R) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \textit{if } 0 \le \delta(R) \le \frac{1}{2}, \\ \delta(R)(1-\delta(R)) & \textit{if } \frac{1}{2} \le \delta(R) \le 1. \end{cases}$$

ここに面の収束指数$\delta(R)$とはΓをRの単位円板上のフックス群模型としたときに（つまり、$p : \mathbb{D} \to R$の被覆変換群），

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |1-\gamma(0)|^{\delta} < \infty$$

となるような正数δの下限として定義される。実はこの数はΓの conical limit set の Hausdorff 次元に等しいことが知られている。特にこの定理から収束指数が 1 より小さいことが$\lambda(R) > 0$であるための必要十分条件であることが分かる。

（同様のことが高次元の双曲的多様体でも成り立つことが知られてきているが、それについてはここではこれ以上言及しない。）

さて$\lambda(R)$を直接計算したり評価するのは難しいので、ここで Cheeger 定数と呼ばれる定数$h(R)$を導入しよう。$\mathcal{D}_R$をR内に含まれる相対コンパクトな領域で境界が滑らかな互いに交わらない有限個の Jordan 曲線からなるもの全体とする。$D \in \mathcal{D}_R$に対して

$$|D| = |D|_R = \iint_D \rho_R(z)^2 dxdy,$$

$$|\partial D| = |\partial D|_R = \int_{\partial D} \rho_R(z)|dz|$$

と定め、

$$h(R) = \sup_{D \in \mathcal{D}_R} \frac{|D|}{|\partial D|}$$

と定義する。次の左辺が有名な Cheeger の不等式である。

Theorem 1.2 (cf. [2]).

$$\frac{1}{16h(R)^2} \le \lambda(R) < \frac{3}{4h(R)}.$$

この結果より特に$\lambda(R) > 0$であるための必要十分条件は$h(R) < \infty$である，つまり双曲的等周不等式$|D| \le h(R)|\partial D|$が成り立つことであることが分かる。なお、簡単な計算から分かるようにRが単連結であれば$h(R) = 1/2$である。

2. 有界幾何学

さて、よく知られているように固有値に関するスペクトルの対応物として閉測地線に関するスペクトル（length spectrum）がある。これらの間には密接な関係があることが知られており、例えば適当な条件のもとでは固有値のスペクトルが同じであれば閉測地線のスペクトルも同じであることなどが知られている。そこで、次のような定義をしたくなるのが人情というものである。

Definition 2.1. Rの閉測地線の長さの下限を L_R^*と書き、これが正となるようなリーマン面を Lehner 型であると呼ぶ。

なお、Rが Lehner 型であるための必要十分条件は Niebur-Sheingorn [4] によってその上の任意の可積分な正則 2 次微分が双曲的有界である，ということが知られている。

ただ、これではやや弱く（実際、Lehner 型だが$\lambda(R) = 0$となる例は平面領域でも簡単に作れる），ここではもう少し強く次のような面を考えよう。

Definition 2.2. L_Rを Rが puncture を持たない時は L_R^*で，持つ時は 0 によって定義する。$L_R > 0$であるような面は単射半径が下から正の定数 $L_R/2$で押さえられるとも言い換えられるので、このような面を有界幾何学を持つ（of bounded geometry）と呼ぶ。

特に Rが平面領域である場合は Rが有界幾何学を持つための必要十分条件は境界が一様完全 (uniformly perfect) であることである (cf. [5])。

Fernández-Rodríguez によって次のことが知られている。

Theorem 2.1 ([2])**.** 平面領域 Rが有界幾何学を持てば$\lambda(R) > 0$である。また R内の閉集合 Aが条件 $\inf_{a,b\in A, a\neq b} d_R(a,b) > 0$ を満たせば$\lambda(R \setminus A) > 0$である。ここに d_Rは Rの双曲距離を表す。

（注意）同じ論文において、$\lambda(R) > 0$ という性質が擬等角写像によって保たれることが証明されている。

この講演ではこの結果を次のように一般化しなおかつ量的な評価を与える。

Theorem 2.2. Rを有界幾何学を持つコンパクトでないリーマン面で種数 $g > 0$は有限であるとする。このとき、

$$h(R) \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi g}{L_R}.$$

特に$\lambda(R) > 0$が成り立つ。

（注意）種数が有限の場合も金井氏[3] の意味での rough isometry の概念を用いれば定理2.1から容易に導けることが分かる。ただ、それだと良い評価を得るのは難しいであろう。

また、多少の puncture などがあっても先と同様の適当な分離条件があれば$\lambda(R) > 0$が成り立つことが分かる。これについては講演の時に詳しく述べることにしたい。

3. 無限種数の場合

先の定理では種数は有限に限ったが、実は種数が無限の場合は面が有界幾何学を持ったとしても$\lambda(R) = 0$となることがあり得る。実際、例えば次のことが知られている。

Theorem 3.1 (Brooks [1]). Rをコンパクトリーマン面とする。$\pi : \tilde{R} \to R$を（不分岐）*Galois* 被覆写像で被覆変換群が有限生成とすると$\lambda(\tilde{R}) = 0$であるための必要十分条件はこの被覆が *amenable* であることである。

ここで被覆が amenable であるとはこの場合には被覆変換群のある生成元系に関する Cayley グラフが vertex の個数に関して“ 等周不等式 ”を満たすことだと思ってよい。例えば、Abel 群は amenable だが自由群は non-amenable である。なお、この論文では Brooks は普遍被覆についてしか述べていないがこのように一般の形でも成り立つ。

References

1. Brooks, R. The bottom of the spectrum of a Riemannian covering, *J. Rine Angew. Math.*, **357** (1985), 101–114.
2. Fernández, J. L. and Rodríguez, J. M. The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **15** (1990), 165–183.
3. Kanai, M. Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of noncompact Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **37** (1985), 391–413.
4. Niebur, D. and Sheingorn, M. Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 239–258.
5. Sugawa, T. Various domain constants related to uniform perfectness, Preprint (1997).
6. Sullivan, D. Related aspects of positivity in Riemannian geometry, *J. Diff. Geom.*, **25** (1987), 327–351.