ON THE BOTTOM OF THE SPECTRUM OF AN OPEN RIEMANN SURFACE

須川 敏幸　　（京都大学大学院・理学研究科）

この講演では双曲的リーマン面の（定曲率-4の）双曲計量に関する（正値）Laplace-Beltrami 作用素に関するスペクトルの bottom に関する結果について述べる。一般次元の Riemann 多様体上の Laplace-Beltrami 作用素のスペクトルについては少なくとも幾何学的有限，特に体積有限な場合にはよく調べられており、$n > 2$ の場合と $n = 2$ の場合とではかなり様子が異なることが知られている。例えば、$n > 2$ の双曲多様体の場合は bottom は体積の逆数の定数倍で下から評価される。一方、$n = 2$ で双曲的リーマン面の場合は体積有限ならば bottom は 0 である。

一方、Fernández, Rodríguez [1], [2] によって平面領域 Rが一様完全な境界を持つとき（つまり Rが modulated であるとき），その面のスペクトルの bottom $b(R)$ が正であることが示された。実際には、このような面については双曲計量に関する等周不等式

$$\sup_D \frac{A_R(D)}{S_R(\partial D)} =: h(R) < +\infty$$

を示し（ただし、ここに上限は Rの相対コンパクトな滑らかな境界を持つ部分領域 D にわたって取り、$A_R(D), S_R(\partial D)$ はそれぞれ Dの双曲面積、及び∂Dの双曲的長さを表す）、Cheeger の不等式

$$\frac{1}{16} \le b(R)h(R)^2$$

を用いて示された。（逆に、$b(R)h(R) < 3/4$であることも知られている。）この定理は次のような形に一般化出来ることを報告したい。

定理. R**が非コンパクトで** modulated **なリーマン面で有限種数** g**を持つとする。このとき、**

$$h(R) \le 1 + \frac{(2g+1)\pi}{L_R}$$

が成り立つ。ここに L_R**は** R**内の可縮でない閉曲線の双曲的長さの下限である。従って、特に** $b(R) > 0$ **が成り立つ。**

ここで Rが modulatedであるとは $L_R > 0$ であることである。双曲的リーマン面 R の収束指数$\delta(R)$ は Rの単位円板上の Fuchs 群モデルをΓとするとき

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |1-\gamma(0)|^{\delta} < \infty$$

を満たす$\delta > 0$ の下限として定義される。これはよく知られているようにΓの conical limit set の Hausdorff 次元に等しい。この Rの収束指数$\delta(R)$ との $b(R)$ の間には次のような関係が知られている。(Elstrodt-Patterson-Sullivan の定理)

$$b(R) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{if } 0 \le \delta(R) \le \frac{1}{2}, \\ \delta(R)(1-\delta(R)) & \text{if } \frac{1}{2} \le \delta(R) \le 1. \end{cases}$$

このことから、次の系が従う。

系. **先の定理と同じ仮定の下で、**$\delta(R) < 1$ **が成り立つ。**

注意なお、種数が無限大の場合には modulated であっても $b(R) = 0$ であるものやそうでないものもあり、これには面の組み合わせ的な条件が絡んでくるようである。

References

1. Fernández, J. L. Domains with strong barrier, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **5** (1989), 47–65.
2. Fernández, J. L. and Rodríguez, J. M. The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **15** (1990), 165–183.