# THE METRIC GEOMETRY OF HYPERBOLIC RIEMANN ORBIFOLDS

須川 敏幸　　（京都大学大学院・理学研究科）

単位円板$\Delta$に作用するある Fuchs 群$\Gamma$を用いて $X = \Delta/\Gamma$と表せる orbifold を双曲的 Riemann orbifold と呼ぶ。このような対象の取り扱いについては例えば[2] を参照されたい。$X$には$\Delta$の双曲計量$\rho_\Delta = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$から射影された計量$\rho_X$が入るがこれを $X$ の双曲計量と呼ぶ。これは分岐点において singularity を持つが長さを測ったりする分には差し支えないことに注意しておく。$X^\circ = X \setminus \mathrm{branch}(X)$ として$\Delta^\circ = \pi^{-1}(X^\circ)$ とおく。（ここに$\pi : \Delta \to X$は自然射影とする。）$X^\circ$は通常の双曲的リーマン面の構造を持っていることに注意してほしい。この講演では $X$における幾何学と $X^\circ$におけるそれとの比較について問題にしたい。

例えば、$X$上の可積分な正則 2 次微分全体のなす Banach 空間を $A_2(X)$ とし、双曲的に有界な正則 2 次微分全体のなす Banach 空間を $B_2(X)$ と書くことにする。よく知られているように一般に $B_2(X) = A_2(X)^*$であり、また $A_2(X) \subset B_2(X)$ であるための必要十分条件は $L^*_X > 0$ である ([3])。ここに $L^*_X$は$\Gamma$の双曲的元によって cover される $X$内の閉曲線の双曲的長さの下限によって定義される。このような面を Lehner 型であると呼ぼう。このとき例えば閉グラフ定理から

$$\kappa(X) = \sup_{\varphi \in A_2(X)} \frac{\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_1}$$

が有限となるが、この定数については次のことが成り立つ。

**定理**.

$$\kappa(X^\circ) \le \kappa(X) \le 3\kappa(X^\circ).$$

これは Bers-Greenberg の isomorphism theorem [1] などから従う。標準的に $A_2(X) = A_2(X^\circ)$ であるからこの結果は $B_2(X) = B_2(X^\circ)$ であることも含んでいる。このことから、$L^*_X$及び $L^*_{X^\circ}$についても何らかの関係が得られると期待されるが、この講演ではさらにこの定数に関する評価についても論じたい。また、この応用についても述べる予定である。

## References

1. Bers, L. and Greenberg, L. Isomorphisms between Teichmüller spaces, Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Ann. of Math. Studies, no. 66 (1971).
2. McMullen, C. *Complex Dynamics and Renormalization*, Ann. of Math. Studies, Princeton (1994).
3. Niebur, D. and Sheingorn, M. Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 239–258.