THE METRIC GEOMETRY OF A HYPERBOLIC 2-ORBIFOLD

須川 敏幸

1997 年 11 月 26 日, 加計国際学術交流センター

1. 序

$\mathit{\Gamma}$を上半平面 $\mathbb{H}$ に作用する Fuchs 群とする。もしこの Fuchs 群が torsion-free ならばこの作用によって $\mathbb{H}$ を割って得られる空間 $X = \mathbb{H}/\mathit{\Gamma}$はリーマン面となり Poincaré 計量$\rho_{\mathbb{H}}(z) = |dz|/2\mathrm{Im}z$は $Aut(\mathbb{H}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ の作用で不変だから自然に X上の滑らかな Riemann 計量ρ_Xを誘導する。すなわち、ρ_Xは$\pi : \mathbb{H} \to X$ を自然射影とするとき$\pi^*(\rho_X) = \rho_X(\pi(z))|\pi'(z)||dz| = |dz|/2\mathrm{Im}z$ を満たす。これを X上の双曲計量と呼ぶ。

一般に$\mathit{\Gamma}$が torsion を持つときにはやはり $X = \mathbb{H}/\mathit{\Gamma}$はリーマン面としての構造を自然に持つがこのときは$\rho_{\mathbb{H}}$の Xへの射影が分岐点においてある種の特異性を持つ。例えば $z_0 \in \mathbb{H}$ に対して$\mathit{\Gamma}_{z_0} = \{\gamma \in \mathit{\Gamma}; \gamma(z_0) = z_0\}$ の位数が n であったとすると単位円板$\mathit{\Delta}$から上半平面への等角写像φで原点を z_0に写すものを取って$\sigma = \pi \circ \varphi$ を考える。点 $p_0 = \pi(z_0)$ における局所座標を $w = z^n$に選べば$\rho_X(w)|nz^{n-1}||dz| = \rho_{\mathit{\Delta}}(z) = |dz|/(1 - |z|^2)$ より

$$\rho_X(w) = \frac{1}{n|w|^{1-1/n}(1 - |w|^{2/n})}$$

と表示することが出来る。しかし分岐点を通る滑らかな曲線のこの計量に関する長さは有限になるので Xに距離が自然に定義される。$\mathbb{H}/\mathit{\Gamma}$という対象についてこの計量や距離を考えることは極めて自然であると思われる。そこで、分岐点の構造を含めた $X = \mathbb{H}/\mathit{\Gamma}$を双曲的 2-orbifold と呼び$\rho_X$を 2-orbifold Xの双曲計量，これによって定まる距離 $d_X(p, q)$ を双曲距離と呼ぶことにする。$\mathbb{H}$が測地的つまり任意の２点を結ぶ測地線が存在するということからやはり Xもこの計量に関して測地的であることが分かる。

Xはここでは位相空間としては $\mathbb{H}/\mathit{\Gamma}$に $\mathbb{H}$ からの商位相を入れたものを考え，underlying complex structure としては射影$\pi : \mathbb{H} \to X$が正則になるようなリーマン面の構造を入れておき、さらにその上に分岐点の構造から定まる因子 (divisor) が与えられたような対象であると思うことも出来る。ここにこの因子 $D : X \to \mathbb{Z}$ は各点 $p \in X$に対して$\pi(z) = p$ なる $z \in \mathbb{H}$ を取った時 $D(p) = \#\mathit{\Gamma}_z - 1$ によって定められるものとする。（ここで $D(p)$ の値は zの取り方によらずに定まることに注意せよ。）集

合 $\{p\in X; D(p)>0\}$ を$\mathrm{branch}(X)$ と書くことにしこれを Xの分岐値集合と呼ぶ。また $X^\circ = X\setminus \mathrm{branch}(X), \mathbb{H}_\Gamma=\pi^{-1}(X^\circ)$ と書くことにする。X°は分岐点の構造がないため通常のリーマン面と思うことが出来る。

Xの下部にあるこのリーマン面を R_Xと書くことにして R_X上のこの因子 Dを Xの分岐因子と呼ぶことにする。Xは最初からリーマン面 Rとその上の因子 Dを組にした (R,D) と思ってもよい。このようなものが実際に Fuchs 群の商として現れるための (R,D) の必要十分条件は Rが解析的有限でないか、または Rが (g,n) 型の解析的有限な面で

$$2g-2+n+\sum_{p\in R}\left(1-\frac{1}{D(p)+1}\right)>0$$

を満たすことであることが知られている。詳しくは[1] または[4] を見よ。特に Xが双曲的ならば X°は常に双曲的構造を持つことに注意せよ。

さて、双曲的 2-orbifold $X=\mathbb{H}/\Gamma$に対してその上の正則２次微分の空間 $Q(X)$ を考える。ここにφが X上の正則２次微分であるとは R_X上の有理型２次微分であって自然射影による引き戻し$\pi^*\varphi$が正則であるようなものである。すなわち、$\mathbb{H}$ 上のΓに関する正則２次微分を Xに自然に射影したようなものである。局所座標による計算から容易に分かるように実は X上の正則２次微分は R_X上の有理型２次微分で$\mathrm{branch}(X)$上で高々１位の極しか持たず他では正則なものに他ならない。しかし、敢えてこのように捉える目的は次の自然なノルムを考えるためである。

X上の正則２次微分には次のようなノルムが定義出来る。

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_1 &= \iint_X |\varphi| = \iint_X |\varphi(z)|dxdy,\\ \|\varphi\|_\infty &= \sup_X |\varphi|\rho_X^{-2}.\end{aligned}$$

そこで空間 $A_2(X)$ 及び $B_2(X)$ をそれぞれノルム $\|\varphi\|_1, \|\varphi\|_\infty$が有限であるような X上の正則２次微分全体からなるものとすると、これらはこのノルムに関して複素 Banach 空間となる。ここで $\|\varphi\|_1$は Xの複素構造のみにより定まることに注意して欲しい。真に orbifold の構造を反映するのは $B_2(X)$ のノルムの方である。よく知られているように $B_2(X)$ は $A_2(X)$ の双対であり，$A_2(X)$ は Teichmüller 空間 $T(X)$ の基点における余接空間と自然に同一視できる。

Xが解析的有限であるときは $A_2(X)$ や $B_2(X)$ は有限次元となり空間として等しいものであった。また、Xが単位円板の時は正則関数の平均値性質から容易に分かるように $A_2(X)\subset B_2(X)$ である。従って、一般に $A_2(X)\subset B_2(X)$ が成立するのではないかと予想されたが、これについては Lehner がある十分条件を与え、Pommerenke が包含関係が成立しない例を与えた ([6])。そしてついに Niebur と Sheingorn によりこれが成り立つための必要十分条件が与えられた。（それは Lehner によって与えられた条件に近いものであった。）

Theorem 1.1 (Niebur-Sheingorn [5]). **$A_2(X) \subset B_2(X)$ が成り立つための必要十分条件は $L^*(X) > 0$ である。ただし、ここに $L^*(X)$ は X の閉測地線の双曲的長さの下限とする。**

ここで X の閉測地線とは Γ の双曲的元 γ の軸 $\mathrm{ax}(\gamma)$ の像になっているような曲線のことを言う。つまり $\mathrm{ax}(\gamma)/\langle\gamma\rangle$ と書けるような曲線である。従って、

$$L^*(X) = \inf_{\gamma\text{: hyperbolic}} \mathrm{tl}(\gamma)$$

と表現することもできる。ここに γ は Γ の双曲的元全体を走り、$\mathrm{tl}(\gamma)$ は γ の $\mathbb{H}$ における translation length を表すとする。つまり $\mathrm{tl}(\gamma) = \inf_{z\in\mathbb{H}} d_{\mathbb{H}}(z, \gamma(z)) = d_{\mathbb{H}}(a, \gamma(a))$, ただしここに a は $\mathrm{ax}(\gamma)$ 上の任意の点である。

$A_2(X) \subset B_2(X)$ であれば閉グラフ定理から包含写像 $A_2(X) \hookrightarrow B_2(X)$ が連続であることが分かる。従ってその作用素ノルム

$$\kappa(X) = \sup\{\|\varphi\|_\infty; \varphi \in A_2(X) \quad \text{s.t. } \|\varphi\|_1 = 1\}$$

は有限である。なお、包含写像 $X^\circ \hookrightarrow X$ に Schwarz-Pick の補題を適用すれば分かるように $\rho_{X^\circ} \geq \rho_X$ であるから任意の X 上の正則２次微分 φ に対して $\|\varphi\|_{A_2(X)} = \|\varphi\|_{A_2(X^\circ)}$ かつ $\|\varphi\|_{B_2(X)} \geq \|\varphi\|_{B_2(X^\circ)}$ であることが分かる。従って $\kappa(X^\circ) \leq \kappa(X)$ が成り立つ。
松崎氏はさらに Niebur-Sheingorn の結果を精密化して次のような定理を得た。

Theorem 1.2 ([3]). **ある普遍定数 $r_0, r_1 > 0$ が存在して次の不等式が成り立つ。**

$$\frac{1}{2\pi L^*(X^\circ)} \leq \kappa(X^\circ) \leq \kappa(X) \leq \max\{\frac{r_0}{L^*(X)}, r_1\}.$$

松崎氏の方法では $\kappa(X)$ を $L^*(X)$ で下から評価するのは困難なようである。しかしながら、先の Niebur-Sheingorn の定理から $\kappa(X) < \infty$ であることと $L^*(X) > 0$ であることは同値なので $\kappa(X)$ は $L^*(X)$ によって下から押さえることは可能であろうと期待される。このことを support する事実として次のことが Greenberg-Bers の定理によって分かる。

Theorem 1.3. $\kappa(X^\circ) \leq \kappa(X) \leq 3\kappa(X^\circ)$.

Proof. X の鏡像 (mirror image) を $\overline{X}$ で表すことにする。Greenberg-Bers の定理により包含写像 $\iota : \overline{X}^\circ \to \overline{X}$ は自然に Teichmüller 空間の双正則同型写像 $\iota^* : T(\overline{X}) \to T(\overline{X}^\circ)$ を引き起こし、これは基点を基点に写している。これらを Bers 埋め込みによってそれぞれ $B_2(X), B_2(X^\circ)$ に埋め込むと Nehari 及び Ahlfors-Weill の定理によりこれらの像は原点を中心とする半径２の球を含み、半径６の球に含まれる。よって Schwarz の補題から $1/3 \leq \|d_0\iota_*\| \leq 3$ である。この原点での tangent map $d_0\iota^*$ は作り方から写像 $B_2(X)$ から $B_2(X^\circ)$ への自然な包含写像になっているのでこのことから結論が従う。 □

従って以下では $L^*(X)$ と $L^*(X^\circ)$ の間の具体的な評価を与えるのが目標である。道具としては collar lemma が本質的である。

2. Collar Lemma と比較定理

この節では $L^*(X)$ と $L^*(X^\circ)$ の比較を行う。X内の曲線αに対して $\ell_X(\alpha) = \int_\alpha \rho_X(z)|dz|$ と定める。また曲線族 $\mathcal{F}$に対しては $\ell_X(\mathcal{F}) = \inf_{\alpha\in\mathcal{F}} \ell_X(\alpha)$ と定義する。

orbifold Xに対して $\mathcal{C}(X)$ を X°内の非自明な閉曲線の（X° における）自由ホモトピー類全体のなす集合とし、$\mathcal{S}(X)$ をその部分集合で単純閉曲線の自由ホモトピー類全体のなす集合とする。（従って $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X^\circ)$ である。）また $\mathcal{C}^*(X)$ は $\mathcal{C}(X)$ の部分集合で Xの puncture 又は分岐値のまわりの loop の何倍かにホモトピックでないもの全体の集合を表すとし、$\mathcal{S}^*(X) = \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{C}^*(X)$ とする。さらに

$$\mathcal{T}^*(X) = \{[\alpha] \in \mathcal{C}^*(X); \alpha \text{ は高々 1 個の自己交叉しか持たない }\}$$

とおく。まず次のことが成り立つ。

Lemma 2.1. X°**が** $(0,3)$ **型でなければ**

$$L^*(X) = \inf_{[\alpha]\in\mathcal{S}^*(X)} \ell_X[\alpha]$$

が成り立つ。X°**が** $(0,3)$ **型であれば次が成り立つ。**

$$L^*(X) = \inf_{[\alpha]\in\mathcal{T}^*(X)} \ell_X[\alpha].$$

Remark. 実際には X°が (0,3) 型ならば $T^*(X)$ の元は本質的には 3 個しか存在しない。

定義から $L^*(X) = \inf_{[\alpha]\in\mathcal{C}^*(X)} \ell_X[\alpha]$ であるから，あとはもし閉測地線αが自己交叉を持てばそこで交叉のつなぎ替えまたは切断を行えば曲線をより単純で短いものに置き換えることが出来るという議論を繰り返せばよい。実際には自己交叉点の個数をどんどん減らしていく操作を行うが、その際に次の 2 つの補題に注意する必要があるがそれ以外にも実際にはやや微妙な議論も必要でありそれはここでは省略する。

Lemma 2.2. $X = \mathbb{H}/\Gamma$**とする。**X°**内の単純閉曲線**α**が**Γ**の位数有限な元**γ**で** *cover* **されるとする。もし**$\gamma = 1$ **ならば**α**は** X°**において自明であり、**$\gamma \neq 1$ **ならば**α**は**γ**の固定点の射影である分岐点の周りを回るループの何倍かに** X°**においてホモトピックである。また、放物的な元**γ**で** *cover* **されるならば**α**は**γ**に対応する** *puncture* **の周りを回るループの何倍かに** X°**においてホモトピックである。**

Lemma 2.3. $X = \mathbb{H}/\Gamma$**とする。**X°**が** $(0,3)$ **型であるとすると** $\mathcal{T}^*(X^\circ)$ **の各元は**Γ**の双曲的元によって** *cover* **される。**

この結果と$\rho_X \le \rho_{X^\circ}$を用いればまず次の評価を得る。

Theorem 2.4. **任意の** $X = \mathbb{H}/\Gamma$**に対して** $L^*(X^\circ) \ge L^*(X)$ **が成り立つ。**

この不等式はいわば易しい方であり逆向きを示す方がより困難だと言える。困難の源泉はもちろん楕円的元の存在にあるが、特に位数２の元が最も大きな障害になっている。（従って、以下の議論は位数２の元が存在しないと仮定すれば著しく簡略化できる。）以下では X°は (0,3) 型ではないとしよう。（(0,3) 型の場合も同様にして出来る。）

まず補題2.1から任意の$\alpha_0 \in \mathcal{S}^*(X)$ について長さを下から評価すればよい。α_0はΓの双曲的元γによって cover されているとする。つまりある点 $z_0 \in \mathbb{H}$ を始点としてαを lift したときその終点が$\gamma(z_0)$ の形になるとする。αをγに対応する閉測地線とする。γが２つの位数２の楕円的元の積で書けない時はαはやはり simple である。

☆　γがΓの２つの位数２の楕円的元の積で表されない時。

この時，α上には分岐点は乗っていないとしてよい。実際そのような分岐点が存在するとすれば、γの軸$\mathrm{ax}(\gamma)$ 上にある楕円的元$\delta \in \Gamma$の固定点 a が乗っている。すると $\mathrm{tl}(\gamma) = d_{\mathbb{H}}(a, \gamma(a)) = d_{\mathbb{H}}(a, \gamma\delta(a)) > \mathrm{tl}(\gamma\delta)$ だからより小さい translation length を持つ双曲的元が存在することになるので、これについて考えれば良い。（正確には長さがどれくらい減るかなど、もう少し議論を要する。）もし位数２の分岐点の近くを通るようなことがあれば、その時はヘアピンのようにその分岐点の近くをかすめていく場合に限られるので、その分岐点を回らないように short cut してやれば曲線はより短く出来る。その際仮定からそのような曲線はやはり双曲的元によって cover されることが従うことに注意する。従って、ある普遍定数 $c_1 > 0$ が存在して

$$d_X(\alpha, \mathrm{branch}_2(X)) \geq c_1$$

が成り立つとしてよい。ここに$\mathrm{branch}_2(X)$ は Xの位数２の分岐点全体のなす集合である。すると、今度は Matelski の定理 ([2]) によりある普遍定数 $c_2 \in (0, c_1)$ が存在して任意の $p, q \in \mathrm{branch}(X)$ でともに位数が 2 でないようなものに対して $d_X(p, q) \geq c_2$ であることが分かっている。従って、次のことが分かる。

Claim. $c_3 > 0$ を $\tanh c_2 = 2 \tanh c_3$に取れば $d_X(\alpha, \mathrm{branch}(X)) \geq c_3$ が成り立つ。

ここまで来ればあとは次の簡単な補題に注意すればよい。

Lemma 2.5. **Xを双曲的 *2-orbifold* とし Yを Xに真に含まれる部分 *orbifold* とする。定数 $c > 0$ に対して $Y_c = \{p \in Y; d_X(p, \partial Y) \geq c\}$ とおけば Y_c上で次が成り立つ。**

$$1 \leq \frac{\rho_Y}{\rho_X} \leq \coth c.$$

よって$\mathrm{tl}(\gamma) \geq \mathrm{tl}(\gamma_1) = \ell_X(\alpha_1) \geq \tanh c_3 \cdot \ell_{X^\circ}(\alpha_1) \geq \tanh c_3 \cdot L^*(X^\circ)$.

☆　γがΓの２つの位数２の楕円的元の積で書けるような双曲的元である時。

このときはγの translation length は２つの楕円的元の固定点を結ぶ測地線の長さの２倍となっているから、少なくとも射影した分岐点 p, qの双曲距離の２倍以上にはなっていることに注意しておく。

まず分岐点p, qの位数が少なくともいずれかが2でないとするとこれはMatelskiの定理から$\mathrm{tl}(\gamma) \geq 2d_X(p,q) \geq c_2$となる。次に分岐点$p, q$の位数がともに2の場合を考える。このときは次のようなcollar lemmaのversionを用いればよい。(2つの対応する固定点の像が同じ点であれば、その場合はその点を結ぶ非自明な単純閉曲線でγのtranslation lengthより短いものが取れるのでこの場合は考えなくてよい。)

Lemma 2.6. **X内の2つの位数2の分岐点p, qに対してその双曲距離の2倍をλとする。このとき$0 < \theta < \pi/2$を$\tan\theta \sinh\lambda = 1$となる数とすれば円環領域$A \subset X^\circ$で、$X \setminus A$のコンパクトな成分が$p, q$を結ぶ測地線となっており、かつ$mod(A) = \pi\theta/\lambda$を満たすものが存在する。**

上のような円環領域Aのcore curve βのAにおける双曲的長さは$\pi^2/m(A) = \pi\lambda/\theta$であるからこれより$\pi\lambda/\theta = \ell_A(\beta) \geq \ell_{X^\circ}(\beta) \geq L^*(X^\circ)$である。一方、

$$\pi\lambda/\theta = \pi\lambda/\arctan(1/\sinh\lambda) < 2\lambda e^\lambda$$

であるからこれより

$$L^*(X^\circ) \leq 2\lambda e^\lambda = 2\mathrm{tl}(\gamma)e^{\mathrm{tl}(\gamma)}$$

が従う。以上より、次の結果を得る。

Theorem 2.7. **ある普遍定数$c > 0$が存在して任意の双曲的*2-orbifold* Xに対して**

$$L^*(X^\circ) \leq cL^*(X)e^{L^*(X)}$$

が成り立つ。さらにもしXが位数2の分岐点を2個以上含まなければ$L^*(X^\circ) \leq cL^*(X)$の形で成り立つ。

この定理における普遍定数cは例えば$\coth c_3$に取れるのである程度具体的に書く事もできる。

References

1. Farkas, H. M. and Kra, I. *Riemann Surfaces*, No. 71 in Grad. Texts Math., Springer-Verlag (1980).
2. Matelski, J. P. A compactness theorem for Fuchsian groups of the second kind, *Duke Math. J.*, **43** (1976), 829–840.
3. Matsuzaki, K. Bounded and integrable quadratic differentials: hyperbolic ane extremal lengths on Riemann surfaces, Geometric Complex Analysis (ed.J. Noguchi *et al.*,), World Scientific, Singapole (1996).
4. McMullen, C. *Complex Dynamics and Renormalization*, Ann. of Math. Studies, Princeton (1994).
5. Niebur, D. and Sheingorn, M. Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 239–258.
6. Pommerenke, C. On inclusion relations for spaces of automorphic forms, Advances in complex function theory (Proc. Sem., Univ. Maryland, College Park, Md., 1973–1974), Vol. 505 of *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag (1976).

京都大学理学部数学教室, 606-01 京都市左京区北白川追分町
E-mail address: sugawa@kusm.kyoto-u.ac.jp