ON A GEOMETRIC PROOF OF SELBERG'S LEMMA

須川 敏幸　　京都大学・理学部

この講演では次の有名な Selberg の補題を Fuchs 群の場合に限って幾何学的に証明することを目標とする。

Theorem 1 (Selberg の補題 [14]). *K を標数 0 の体とする時、$\mathrm{GL}(n, K)$ の有限生成部分群は torsion-free で指数有限な部分群を含む。*

なお、比較的易しい証明としては [2] を参照されたい。我々がこの結果を使うのは主に$\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$（ここに $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）の有限生成離散部分群についてであるが、応用上も理論上もしばしばその torsion free な部分群（または正規部分群）の指数がどの程度に取れるかが重要になる。しかし、上記の定理の証明は非常に代数的であり具体的な指数の評価を与えてくれるものではない。そこで幾何学的にこの定理を証明することによりその指数の評価をしようというのが今回の講演の目論見である。Klein 群の場合に示すのが興味深いがそれはやはり難しいので今回は Fuchs 群の場合に限ることにする。（Fuchs 群の場合は torsion 元は必ず分岐点を represent するというのが議論が簡明になる理由である。）

ただ、今回の講演はほとんどの内容が well-known であろうと思われる。たとえば [9], [13], [8], [5], [6], [10] などを参照して頂きたい。

Γを上半平面 $\mathbb{H}$ に作用する（有限生成とは限らない）Fuchs 群とすると上半平面 $\mathbb{H}$ のΓによる商 $X = X_\Gamma$は自然に orbifold の構造を持つ。これを説明しておこう。まず商空間 $\mathbb{H}/\Gamma$は自然にリーマン面の構造を持つ。これを $R = R_X$と書くことにする。任意の $x \in R$ に対して $p(a) = x$ となる $a \in \mathbb{H}$ を取り a のΓの固定群は自明であるかまたは楕円型の元で生成された有限巡回群となる。この位数を $I_X(x)$ と書くことにし x における分岐指数と呼ぶことにする。$I_X(x) > 1$ なる点 x を X の分岐点と呼ぶ。このようなリーマン面 R とその上の自然数値函数 I で $I > 1$ なる点が離散的閉集合となるようなものの組 $X = (R, I)$ を (hyperbolic) orbifold と呼ぶ。先に X が与えられた場合は対応する R, I をそれぞれ R_X, I_Xと書くことにする。

orbifold X, Y に対して $p : Y \to X$ が被覆であるとは $p : R_Y \to R_X$が正則な分岐被覆であり $y \in R_Y$に対して $B_p(y)$ を p の y における局所次数とすれば $I_X(p(y)) = I_Y(y) \cdot B_p(y)$ が任意の $y \in R_Y$について成り立つことを言う。特に Y が上半平面（または単位円板）の時このような p は orbifold X の一意化写像と呼ぶ。

また $X = X_\Gamma$には $p : \mathbb{H} \to X$ を自然射影として $p^*(\rho_X) = |dz|/2\mathrm{Im} z$ を満たす計量が一意的に入るがそれを X の Poincaré計量または双曲計量と呼ぶ。それに関する X の面積は良く知られているようにΓが第 2 種の場合には無限大であり第 1

種の場合は

$$(1)\qquad Area(X) = \frac{\pi}{2}\left(2g-2+n+\sum_{x\in R_X}\left(1-\frac{1}{I_X(x)}\right)\right)$$

となる。ただしここに g は R_Xの種数とし n は R_Xの puncture の個数とする。

この値はもちろん正であるが抽象的に定義された orbifold $X=(R,I)$ に対して上半平面からの一意化写像が存在するための必要十分条件が Rが解析的有限でないか、またはこの(1) の右辺が正である、ということが知られている。

有限生成 Fuchs 群Γに対して $(g;\nu_1,\cdots,\nu_k;n;m)$ をΓの signature と呼ぶ。ここに g,n,m はそれぞれ R_{X_Γ}の種数、puncture の個数、hole の個数とし、$\nu_1,\cdots,\nu_k$ は $I(x)>1$ となるような x について値 $I(x)$ を重複も許して並べたものとする。

Fuchs 群Γについて次の量を考える。

$$\alpha(\Gamma)=\min\{[\Gamma:\Gamma_0];\Gamma_0<\Gamma:\ \text{torsion free}\}$$
$$\beta(\Gamma)=\min\{[\Gamma:\Gamma_0];\Gamma_0\lhd\Gamma:\ \text{torsion free}\}$$

空集合の min は ∞ と約束しておく。

まず$\alpha(\Gamma)$ については次の結果が究極的であろう。

Theorem 2 (Edmonds-Ewing-Kulkarni [5]). *Γを $(g;\nu_1,\cdots,\nu_k;n;m)$ を signature に持つ Fuchs 群とする。自然数 N に対してΓの torsion free な部分群で指数 N のものが存在するための必要十分条件は N が $2^\varepsilon\nu$で割り切れることである。従って特に$\alpha(\Gamma)=2^\varepsilon\nu$が成り立つ。ここに$\nu=LCM(\nu_1,\cdots,\nu_k)$ で、εは $n+m=0$ かつνが偶数だがν/ν_jが奇数になるような j は奇数個であるときには値 1 を取りそれ以外の場合には値 0 とする。*

これは最良の結果であるが$\beta(\Gamma)$ に関してはそれほど良い情報を与えてくれるわけではない。一応、一般論を述べておくと、H を群 G の有限指数 n を持つ部分群とすると H に含まれる最小の G の正規部分群 $H_1=\cap_{g\in G}gHg^{-1}$ は $[G:H_1]\le n$ を満たす。従って少なくとも上の定理の系として我々は$\beta(\Gamma)\le(2^\varepsilon\nu)$を得るがこれは良い評価であるとは期待できない。一方、上のやはり定理から$\beta(\Gamma)$ は必ず $\alpha(\Gamma)$ によって割り切れることにも注意しておく。

実際にβの値がどれくらいになるかは数論的な深い問題とも関係しており一般には難しいようである（[11] 参照)。また、正規部分群についてはリーマン面の自己同型群の問題とも密接に関係しており微妙な問題が出てくるであろうことは想像に難くない。

ここでは、少なくともある特別なクラスを除いてはそこそこ満足すべき評価が得られるのでそれを紹介しておこう。なお、有限生成であることも特に必要ではない。

Theorem 3. *Γを任意の Fuchs 群として対応する orbifold を X とする。R_Xの種数を g とし puncture および hole の個数の和を s とする。さらに $I_X(x)$ の値で 1 よりも大きいものを重複度を許して並べたものを$\nu_1,\nu_2,\cdots$としてこれを分岐データと呼ぶ。k を分岐データの個数とする。また$\nu=LCM(\nu_1,\cdots)$ とし、これが有限であると仮定する。*

1. 分岐データが$\nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_2, \cdots$のような形をしている時は *torsion free* な正規部分群Γ_1で$\Gamma/\Gamma_1 \cong \mathbb{Z}_\nu$となるものが取れる。従ってこの場合は$\beta(\Gamma) = \nu$が成り立つ。
2. $g > 0$ または $g = 0$ だが R_Xが単連結でないときは$\beta(\Gamma) \leq 2\nu^2$.
3. R_Xが単連結だがコンパクトでないときは、とりあえず $k < \infty$ を仮定すれば *torsion free* な正規部分群Γ_1で$\Gamma/\Gamma_1 \cong \mathbb{Z}_{\nu_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\nu_k}$なるものが存在する。従って$\beta(\Gamma) \leq \nu_1 \cdots \nu_k$が成り立つ。
4. R_Xがリーマン球面と同型の時、pを2νを割り切らない任意の素数とし、$(\mathbb{Z}_{2\nu})^\times$における$p \mod 2\nu$の位数を$t$として$q = p^t$とおく。このとき *torsion free* な正規部分群Γ_1でΓ/Γ_1が$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_q)$ の部分群に同型であるようなものが存在する。従って特に$\beta(\Gamma) \leq \# PSL(2, \mathbb{F}_q) = q(q^2-1)/2$が成り立つ。

最後のケースが最も難しいといえるが本質的に難しいのは三角群と呼ばれている群の正規部分群を求めることである。有限単純群と密接な関係があることなどから多くの人によって調べられている。たとえば [15], [3], [12], [7], [1], [4] などを参照されたい。

References

[1] Albar, M. A. and Al-Hamdan, W. M. The triangle groups, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **89** (1993), 103–111.

[2] Alperin, R. C. An elementary account of Selberg's lemma, *Enseig. Math.*, **33** (1987), 269–273.

[3] Broughton, S. A. Simple group actions on hyperbolic Riemann surfaces of least area, *Pacific J. Math.*, **158** (1993), 23–48.

[4] Edjvet, M. On certain quotients of the triangle groups, *J. Algebra*, **169** (1994), 367–391.

[5] Edmonds, A. L., Ewing, J. H. and Kulkarni, R. S. Torsion free subgroups of Fuchsian groups and tessellations of surfaces, *Invent. Math.*, **69** (1982), 331–346.

[6] Edmonds, A. L., Kulkarni, R. S. and Stong, R. E. Realizability of branched coverings of surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **282** (1984), 773–790.

[7] Everitt, B. Alternating quotients of the $(3, q, r)$ triangle groups, *Comm. Alg.*, **25** (1997), 1817–1832.

[8] Feuer, R. D. Torsion-free subgroups of triangle groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **30** (1971), 235–240.

[9] Fox, R. H. On Fenchel's conjecture about F-groups, *Mat. Tidsskrift. B.* (1952), 61–65.

[10] 河野俊丈 曲面の幾何構造とモジュライ, 日本評論社 (1997).

[11] Kulkarni, R. S. Normal subgroups of Fuchsian groups, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **36** (1985), 325–344.

[12] Malle, G. Hurwitz groups and $G_2(q)$, *Canad. Math. Bull.*, **33** (1990), 349–357.

[13] Mennicke, J. Eine Bemerkung über Fuchssce Gruppen, *Invent. Math.*, **2** (1967), 301–305; ibid. **6** (1968), 106.

[14] Selberg, A. On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, Contribution to Function Theory, Tata (1960).

[15] Woldar, A. J. On Hurwitz generation and genus actions of sporadic groups, *Ill. J. Math.*, **33** (1989), 416–437.