

ON THE BOTTOM OF THE SPECTRUM OF A RIEMANN SURFACE OF INFINITE TOPOLOGICAL TYPE

須川 敏幸 京都大学・理学部

R をリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$, 複素平面 \mathbb{C} , およびそこから 1 点抜いた $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ そして複素トーラス (楕円曲線) のいずれとも双正則同値ではないリーマン面とする。するとよく知られているように R 上には定曲率 -1 を持つ完備共形リーマン計量 $\rho_R = \rho_R(z)|dz|$ が一意的に存在する。これは通常 R の双曲計量または Poincaré 計量と呼ばれる。これに関する Laplace-Beltrami 作用素 $-\Delta$ は R 上の滑らかなコンパクトサポートを持つ関数の空間に作用するがこれは $L^2(R)$ 上の positive な非有界自己共役作用素に一意的に拡張される。本講演では $-\Delta$ の L^2 -スペクトルの bottom $\lambda(R)$ が正であるかどうかについて考察する。この量が正であるかどうかはリーマン面の幾何学を考える上で重要である (cf. [5])。たとえば $\lambda(R) > 0$ であるための必要十分条件は双曲的等周不等式が成立することであることが知られている。つまり、

$$h(R) = \sup_{D \in \mathcal{D}_R} \frac{|D|}{|\partial D|} < \infty$$

が成り立つことである。ここに \mathcal{D}_R は R の相対コンパクトな部分領域で境界が区分的に滑らかな Jordan 曲線の disjoint union であるようなもの全体を表し、 $|D|$ 及び $|\partial D|$ は R における双曲的面積及び双曲的長さを表すとする。Cheeger の不等式から $1/4h(R)^2 \leq \lambda(R)$ であるから $h(R)$ を具体的に評価することによって $\lambda(R)$ の具体的評価が得られる。

R の位相型が有限である場合には $\lambda(R)$ が 0 であるための必要十分条件が R の解析型が有限 (つまり R はコンパクトリーマン面から有限個の点を抜いて得られる面) であることが知られている。従ってここでは位相型が有限でないものについて考える。この問題については次のことが知られている。

Theorem 1 (Fernández-Rodríguez [1], [2]). R を種数 0 の有界幾何学を持つ双曲的リーマン面とすると $\lambda(R) > 0$ である。さらに a_n を R の分離的点列、つまり $\inf_{n \neq m} d_R(a_n, a_m) > 0$ とする。このとき部分領域 $R' = R \setminus \{a_n\}$ もやはり $\lambda(R') > 0$ を満たす。

ここに R が有界幾何学を持つ (of bounded geometry) とは R の単射半径が正であることである。言い換えれば R 内の自明でない閉曲線の長さの下限 $L(R)$ が正であることである。また、 $d_R(p, q)$ は R の双曲計量に関する距離を表すものとする。

この定理は金井氏 [3] の “rough isometry” の概念を用いれば種数が有限な場合にも拡張できることがわかるが、実際に $\lambda(R)$ は種数及び $L(R)$ にも依存する定数で下から評価されることを筆者は示した。(前回の函数論分科会の講演で報告済み。) 今回の講演ではこの結果の次のような一般化について報告する。

Theorem 2 ([4]). R を非コンパクトで有限種数 g , 有限幾何学を持つ双曲的リーマン面として A_1, A_2, \dots を次の条件を満たす R のコンパクト部分集合の (有限または無限) 列とする:

R の点列 x_1, x_2, \dots 及び定数 σ, τ, H が存在して以下の条件を満足するとする。

1. $0 < 2\sigma < \tau < L(R)/2$,
2. $1 \leq H < \infty$,
3. $d_R(x_k, x_l) \geq 2\tau - 2\sigma$ for $k \neq l$,
4. $A_n \subset \{x \in R; d_R(x, x_n) \leq \tau - 2\sigma\}$,
5. $h(B_n \setminus A_n) \leq H$,

ただしここに $B_n = \{x \in R; d_R(x, x_n) < \tau\}$ とする。

このとき $h(R), \sigma, \tau, H$ にのみ依存する定数 $K < \infty$ が存在して部分領域 $R' = R \setminus \bigcup_n A_n$ は $h(R') \leq K$ を満たす。従って特に $\lambda(R') > 0$ である。

Remark . 定数 K は具体的に記述できる。詳細については [4] を参照して頂きたい。

REFERENCES

- [1] FERNÁNDEZ, J. L. Domains with strong barrier, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **5** (1989), 47–65.
- [2] FERNÁNDEZ, J. L. and RODRÍGUEZ, J. M. The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **15** (1990), 165–183.
- [3] KANAI, M. Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of noncompact Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **37** (1985), 391–413.
- [4] SUGAWA, T. On the bottom of the spectrum of a Riemann surface of infinite topological type, To appear in 数理解析研究所講究録.
- [5] SULLIVAN, D. Related aspects of positivity in Riemannian geometry, *J. Diff. Geom.*, **25** (1987), 327–351.