

A LOWER ESTIMATE OF HYPERBOLIC METRIC BY GREEN'S FUNCTION

須川 敏幸 京都大学・理学部

R を双曲的リーマン面として $\rho_R = \rho_R(z)|dz|$ を曲率 -4 の双曲計量 (Poincaré 計量) とする。双曲計量及びそれから誘導される双曲距離の評価は種々の計算において重要なステップとなるが、上からの評価より下からの評価の方が難しいことが多いように思われる。例えば R が複素平面 \mathbb{C} の部分領域の場合は $\delta_R(z) = \text{dist}(z, \partial R)$ (ここに dist は Euclid 計量による距離を表す) としたとき Schwarz-Pick の補題より

$$\rho_R(z) \leq \frac{1}{\delta_R(z)}$$

が一般的に成り立つことが分かるが、逆向きの不等式は一般には成り立たない。 $\rho_R(z) \geq \text{const.}/\delta_R(z)$ が成り立つための必要十分条件は ∂R が一様完全であることである [2]。あるいは、仮にこのような評価が得られたとしても、双曲距離の下からの評価のためには与えられた 2 点を結ぶあらゆる path を考えて長さの下限を取る必要があるため下からの評価は計量 (またはその密度) の下からの評価よりも一段と難しい。(上からの評価には例えば適当な path を一つ取ってやれば十分である。)

そこで別のもう少し扱いやすい、あるいは計算しやすい等角不変量によってこれらの量を下から評価することを考えたい。この講演では正值調和函数あるいは Green 函数を用いる。

まず h を R 上の非定数正值調和函数とする。(従って $R \notin O_G$ である。) すると $Dh := dh + i * dh = 2h_z dz$ は R 上の正則微分 (holomorphic 1-form) でありその絶対値 $|Dh| = 2|h_z||dz|$ は広義の計量となる。ここに 1-form $\omega = adx + bdy$ に対して $*\omega = -bdx + ady$ である。“広義の” と言ったのはつまり Dh の零点以外では滑らかな Riemann 計量であるが Dh の零点では $|Dh|$ が 0 になってしまうので、この点において退化してしまうからである。しかし、計量による距離などを定義する上では差し支えない程度の特異性なのでそれほど深刻に考える必要はない。

まず Schwarz-Pick の補題から容易に分かるように次の評価が成り立つ。

Theorem 1.

$$\frac{|Dh|}{2h} \leq \rho_R.$$

しかしこの形は Green 函数に対しては直接適用できない。そこで次のような函数のクラスを導入して定理を述べる。連続函数 $g : R \rightarrow (0, +\infty]$ が広義の調和函数であるとは各点 $a \in R$ に対してその点の近傍で g が (有限値) 調和であるか、またはある定数 $c \geq 1$ が存在して $z = z(p)$ を a における R の局所座標で $z(a) = 0$ なるものとするとき $g + c \log |z|$ が a の近傍で調和であることとする。後者のような a を g の極と呼ぶ。さらに上において定数 c が 1 に取れる時にその極を Green 型であると呼ぶことにする。全ての極が Green 型であるとき g は Green 型の広義の調和函数と呼ぶことにする。

そこで広義の調和函数 g に対して次の広義のリーマン計量

$$\sigma = \sigma_g = \frac{|Dg|}{2 \sinh(g)}$$

を考える。仮定よりこの σ は R 上の連続な計量であり Dg つまり dg の零点及び $c > 1$ なる g の極において 0 となり逆に 0 となるのはそれらの点に限る。極が Green 型の場合はその点において σ は滑らかであることに注意しておく。定義から明らかのように R の Green 函数は Green 型の広義の調和函数である。

Theorem 2. g を R 上の広義の調和函数とするととき次が成り立つ。 $\sigma_g \leq \rho_R$.

Proof. σ の Gauss 曲率 $\Delta(\log \sigma)/\sigma^2$ は σ の零点を除いては恒等的に -4 であることが直接計算により分かる。従って Ahlfors の補題 [1] により $\sigma \leq \rho_R$ であることが分かる。

ここで $\sigma_g \geq |dg|/2 \sinh(g)$, $\sigma_g \geq |*dg|/2 \sinh(g)$ であるから次の系を得る。

Corollary 3. g を R 上の広義の調和函数とし $p, q \in R$ を任意の 2 点とする。このとき双曲距離について次の評価を得る。

$$d_R(p, q) \geq \frac{1}{4} \left| \log \frac{\coth g(p)}{\coth g(q)} \right|.$$

Corollary 4. γ は R の Green 函数 $g = G(\cdot, a)$ の等高線 $g = c$ の部分弧とする。このとき

$$\int_{\gamma} \rho_R(z) |dz| \geq \frac{1}{2 \sinh c} \int_{\gamma} |*dg| = \frac{\pi}{\sinh c} \omega(\gamma, a, R(c))$$

が成り立つ。ここに $\omega(\gamma, a, R(c))$ は領域 $R(c) = \{p \in R; g(p) > c\}$ における a から見た γ の調和測度とする。

定理 2 がどの程度良いかについてであるが、例えば g が Green 函数 $G(p, a)$ である場合について $c_0 = \max\{g(b); dg = 0 \text{ at } 0\}$ とした時次の結果が成り立つ。

Theorem 5. Green 函数 $g(p) = G(p, a)$ 及び上記の c_0 に対して領域 $R(c_0) = \{p \in R; G(p, a) > c_0\}$ において次の評価が成り立つ。

$$\rho_R \leq \frac{|Dg|}{2e^{-c_0} \sinh(g - c_0)} = \frac{e^{c_0} \sinh(g)}{\sinh(g - c_0)} \sigma_g.$$

REFERENCES

- [1] AHLFORS, L. V. *Conformal Invariants*, McGraw Hill, New York (1973).
- [2] BEARDON, A. F. and POMMERENKE, CH. The Poincaré metric of plane domains, *J. London Math. Soc. (2)*, **18** (1978), 475–483.