ON THE BOTTOM OF THE SPECTRUM OF A RIEMANN SURFACE OF INFINITE TOPOLOGICAL TYPE

須川 敏幸　　京都大学・理学部
TOSHIYUKI SUGAWA

1. 序

この講演では双曲的リーマン面のスペクトルの底 (bottom) の具体的な評価（特にそれが正であるかどうか）について考察を行う。その前に少し背景の説明をしておくことにしよう。

まずリーマン多様体上の（正値）Laplace-Beltrami 作用素のスペクトルの底は様々な幾何学的な量と結びついていることが知られている。Sullivan によってこれらについてまとめられた論文 [14] は非常に参考になるであろう。特にスペクトルの底が正であるかどうかは多様体の大域的な性質を知る上で非常に重要であることを注意しておく。以下では 2 次元以上の双曲多様体に絞って次元による違いについて少し説明しておく。双曲多様体のスペクトルの底の評価に関する一般的な結果はおそらくあまり知られていないが、少なくとも幾何学的有限なクラスについては比較的良く知られている。このクラスに限れば次元が 2 かそれより大きいかで様相が異なることが分かっている。N を双曲多様体として $C(N)$ をその凸核 (convex core) とし $C_1(N)$ を双曲距離に関する $C(N)$ の 1-近傍とする。N が幾何学的有限であるための必要十分条件は $C_1(N)$ の体積が有限であることである。$n \geq 3$ ならば次が成り立つことが知られている。

定理 1 (Burger-Canary [3]). **$n \geq 3$ に対して n にのみ依存する定数 $K_n > 0$ が存在して次が成り立つ：N を体積有限でない幾何学的有限な n 次元双曲多様体とするとそのスペクトルの底 $\lambda(N)$ について次の評価式が成立する。**

$$\lambda(N) \geq \frac{K_n}{\mathrm{vol}(C_1(N))^2}.$$

ここでもし体積有限ならば定数函数が L^2-函数となるから底は自動的に 0 になってしまうことに注意しておく。実はこのような体積による一様評価は以下でも見るように 2 次元の場合には単射半径が本質的に寄与してくるので成り立たない。この様相の違いは双曲多様体をいわゆる thick-thin decomposition した場合に thick part が 3 次元以上では連結になるのに対して 2 次元では一般には不連結になり得ることに起因していると考えられる。

以下では簡単のために向きづけ可能な 2 次元双曲多様体についてのみ考える。このような面には等温座標により複素構造が入ることが知られているので、最初からそのようなリーマン面のみを考える。

2 次元の場合は幾何学的有限という条件は位相的有限（つまり基本群が有限生成）という条件と同値になってしまうことが知られているが、このような場合にはスペクトルの底

が 0 であるための必要十分条件はそれが解析的有限（つまり双曲面積有限）であることが分かっている。従って次は位相的に有限でない場合が問題になる。2 次元の場合には位相的有限な面の分類が完全にされていることに加えて使える道具も多いので attack する余地が十分にあると言える。しかし、この方向の結果は非常に少ないのが現状である。この方向での最初の本質的進歩は Fernández [6] によってなされ、Fernández-Rodríguez [7] によって補完された。その主要な結果は次の通りである。

定理 2 ([6], [7]). D **を一様完全な境界を持つ双曲的平面領域とすると** D **のスペクトルの底は正である。さらに** $a_n (n = 1, 2, \dots)$ **を分離的な** D **内の点列とすると、**$D' = D \setminus \{a_n; n = 1, 2, \dots\}$ **のスペクトルの底は正である。**

ここで点列 a_n が分離的とは相異なる 2 点間の双曲距離が下から一様に正数で押さえられていることを言う。また、リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 内のコンパクト集合 E が一様完全であるとは $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ 内の 2 重連結領域 A で E を分離する（つまり $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ の二つの連結成分がともに E と交わる）ものの modulus が上に有界であることである。同値な条件として、ある定数 $0 < c < 1$ が存在して任意の点 $a \in E$ 及び $0 < r < \mathrm{diam} E$ に対して

$$E \cap \{z \in \mathbb{C}; cr < |z - a| < r\} \neq \emptyset$$

が成り立つ、というものがある。この条件はさらに D 内の可縮でない閉曲線の双曲的長さの下限が正であるということとも同値である。（詳しくは例えば [12] を参照されたい。）彼らの証明は一様完全境界を持つ平面領域では双曲計量が擬双曲計量と比較可能であるという平面特有の結果を本質的に使っており、種数が正のリーマン面に同じ手法をそのまま適用するのは難しいと思われる。一方、金井氏による rough isometry の概念を用いれば，上記のようなリーマン面に有限個のハンドルを付け加えても底が正であるという性質は保たれるので [8]，種数が有限である限り同様の結果は成り立つ。しかし、具体的な評価はこの方法では得るのが困難であろう。

そこで、以下では別の方法で，しかも解析的有限なリーマン面の双曲面積に関するよく知られた結果（Gauss-Bonnet の定理の一つの応用）と Cheeger の不等式（後述）しか本質的には用いないような初等的な方法によって種数有限で単射半径が正であるようなリーマン面に対して具体的な評価を導出する。さらに，定理 2 の後半の主張の一般化としてもう少し複雑な集合を抜いた面に対しても同様にスペクトルの底が正であることを評価付きで示す。

これらの主張はコンパクト面に対してよく知られている一般原理「eigenvalue spectrum と length spectrum に関する性質はうまく対応する」ということに符合するかに思える。（有名な結果として、例えば二つの双曲的なコンパクトリーマン面があった時に、それらの eigenvalue spectrum が重複度も込めて同じであるための必要十分条件がそれらの length spectrum が重複度も込めて同じである，というものがある。証明には Selberg の跡公式が本質的な役割を果たす。なお、spectrum が重複度を込めて同じであってもそれらの二つが等長的とは限らないことに注意しておく。）eigenvalue spectrum の底 $\lambda(R)$ に対応するものは，例えば先ほどから出ている可縮でない（単純）閉曲線の長さの下限 $L(R)$ であろうと考えられる。（$L(R)$ は R の単射半径のちょうど 2 倍になっている。）我々の結果は R の種数が有限であるという前提の下に $L(R) > 0$ ならば $\lambda(R) > 0$ であることを主張して

いる。しかし、定理 2 の後半の主張が示すように必ずしも逆は成り立たない。ただ、この定理の後半で構成された面については puncture に homotopic でないような非可縮な閉曲線の双曲的長さの下限 $L^*(R)$ を考えたとき（これは面 R の閉測地線の長さの下限と言ってもよい），抜いた点は分離的だったからこの量は正になっている。そこで、少し主張を弱めて「$\lambda(R) > 0$ ならば $L^*(R) > 0$ が成り立つか？」という命題が考えられるが、実はこれも成り立たないことが我々の主定理 2 から分かる。一方で、$L^*(R) > 0$ ではあるが $\lambda(R) = 0$ となるような平面領域も構成できる（4 節参照）。

また、我々の定理では種数の有限性を仮定しているが、実はこの仮定も本質的である。種数が無限大の場合については 4 節において考察を加える。種数が無限大である場合には面の幾何学というよりは、より組み合わせ論的な条件が絡んでくるように思われるがまだそれについての明快な定式化はないように思われる。

2. 記号と主定理

この節では必要となる記号及び結果と主定理について述べる。R を双曲的リーマン面とする。つまり、R はリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ および複素トーラス（楕円曲線）以外のリーマン面とする。すると Poincaré-Koebe の一意化定理により単位円板 $\mathbb{D}$ からの正則な普遍被覆写像 $p : \mathbb{D} \to R$ が存在する。p の被覆変換群 Γ は Fuchs 群と呼ばれ $\mathrm{PSU}(1,1) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の離散部分群で torsion-free なものになっている。単位円板は Gauss 曲率 -1 の等角不変な計量 $\rho_{\mathbb{D}}^2 = 4(dx^2 + dy^2)/(1 - |z|^2)^2$ を持つのでこれは自然に R に射影される。これを ρ_R^2 と書き R の双曲計量（または Poincaré 計量）と呼ぶ。R 上の区分的に滑らかな曲線 α の双曲的長さ、および区分的に滑らかな境界を持つ部分領域 D の双曲的面積を（標準的な記号ではないが）それぞれ $|\alpha|_R, |D|_R$ と表すことにする。考えているリーマン面がどれか明らかな場合には添え字の R は省略する場合もある。前節でも述べたように $L(R), L^*(R)$ は R 内の可縮でない閉曲線及び R における閉測地線の双曲的長さのそれぞれの下限を表すものとする。定義からもちろん $L(R) \le L^*(R)$ である。$L(R) > 0$ を満たすリーマン面は**有界幾何学を持つ**と呼び、$L^*(R) > 0$ を満たすリーマン面は **Lehner 型**であると呼ぶ。「有界幾何学」という用語は一定した定義がないようにも思われるが、例えば [11] などを見ていただきたい。今の場合は $\mathbb{D}$ が等質なので $L(R) > 0$ という単射半径が正であるという条件が同値な条件となっている。（人によっては、このようなリーマン面を“ uniformly perfect ”,“ modulated ”とも呼んでいるようであるが、どうもあまり広く認知された用語がないようである。）また、$L^*(R) > 0$ という条件は実は R 上の可積分な正則 2 次微分 $\varphi = \varphi(z)dz^2$ が常に双曲的有界（つまり $|\varphi|\rho_R^{-2}$ が R 上で有界）となるための必要十分条件となっている [10]。（Lehner 型というのは筆者がとりあえず付けたもので、まだ認知されるに至っていない。）

さて、R 上の Laplace-Beltrami 作用素 $-\Delta$ は $C_c^\infty(R)$ に非負自己共役作用素として作用している。従って一般論からこれは $L^2(R)$ 上の（非有界）非負自己共役作用素に一意的に拡張でき，そのスペクトルは $[0, \infty)$ に含まれる。スペクトルの下限を $\lambda(R)$ と書くことに

する。これは次のような Rayleigh 商の形で書くことも出来る。

$$\lambda(R) = \inf_{\varphi \in C_c^\infty(R)} \frac{\iint_R |\nabla\varphi|^2 d\mathrm{vol}}{\iint_R \varphi^2 d\mathrm{vol}}.$$

この量はリーマン面 R の収束指数 (critical exponent of convergence) $\delta(R)$ と密接なつながりがあることが Elstrodt-Patterson-Sullivan によって示された。ただし、ここで $\delta(R)$ は次の級数が収束するような $\delta > 0$ の下限である。

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-\delta d_\Delta(0, \gamma(0))).$$

この級数は $\sum(1 - |\gamma(0)|)^\delta$ と比較可能であり、こちらの級数で定義してもよい。実はこの値は R の Fuchs 群モデル Γ の非接極限集合 (conical limit set) の Hausdorff 次元に等しいことが知られている [9]。これについて次のことが成り立つ。

定理 3 (Elstrodt-Patterson-Sullivan [14]).

$$\lambda(R) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{if } 0 \le \delta(R) \le \frac{1}{2}, \\ \delta(R)(1 - \delta(R)) & \text{if } \frac{1}{2} \le \delta(R) \le 1. \end{cases}$$

従って、特にこのことから $\lambda(R) > 0$ は条件 $\delta(R) < 1$ と同値になる。

スペクトルの底 $\lambda(R)$ を評価するには Cheeger の不等式を用いるのが至便である。それについて説明しよう。まず、等周定数（または Cheeger 定数）と呼ばれる量を導入しよう。以下では定義を容易にするために R は解析的有限ではないと仮定する。（最初に述べたようにこのようなクラスは最初から除外しておいても一般性を失わない。）

$\mathcal{D}_R$ を R 内の区分的に滑らかな互いに交わらない有限個の Jordan 曲線で囲まれた相対コンパクトな部分領域全体を表すとする。これに対して次のように定める。

$$h(R) := \sup_{D \in \mathcal{D}_R} \frac{|D|_R}{|\partial D|_R},$$

これをここでは等周定数と呼んでおくことにする。（通常はこの逆数で定義されるものだが、本稿では便宜上これを考える。）先に定義したように $|D|_R, |\partial D|_R$ はそれぞれ $D, \partial D$ の双曲的な面積及び長さを表す。すなわち $|D|_R = \iint_D \rho_R(z)^2 dxdy, |\partial D|_R = \int_{\partial D} \rho_R(z)|dz|$ とする。

$h(R)$ が有限であることはとりもなおさず、双曲的な意味での等周不等式が成り立つことと同義であるが、実はこのことが底が正であることを特徴付けるのである。

定理 4 (Cheeger の不等式).

$$\frac{1}{4h(R)^2} \le \lambda(R).$$

この評価式はもっと一般的な状況の下でも成り立つが、証明は例えば [5] などを参照して頂きたい。また、この逆方向の結果も示されている。P. Buser [4] はある定数 C が存在

して $\lambda(R)h(R) \leq C$ となることを一般次元で示しているが、リーマン面の場合には実際に $C < 3/2$ に取れることが [7] では証明されている。

これを用いて我々は次の結果を得る。

定理 5 (主定理１). R **を解析的有限でない双曲的リーマン面とし、さらに種数** g **及び** puncture **の個数** n **が有限であると仮定する。このとき等周定数は次のように上から評価される。**

$$h(R) \leq 2 + \frac{2\pi \max\{2g+n-1, 1\}}{L^*(R)}.$$

従って特に $L^*(R) > 0$ **ならば** $\lambda(R) > 0$ **が成り立つ。**

この評価式は証明から分かるようにかなり最良に近いものになっている。もう少し努力すると実は次のやや複雑な形の結果も示せる。

定理 6 (主定理２). R **を有界幾何学を持つ双曲的リーマン面で** $h(R) < \infty$ **を満たすものとする。さらに** $A_1, A_2, \ldots$ **を** R **のコンパクト集合の（有限または無限）列で次の条件を満たすものとする。すなわち、ある点列** $x_1, x_2, \ldots$ **と定数** σ, τ, H **が存在して次の条件を満たすとする。**

1. $0 < 2\sigma < \tau < L(R)/2$ **かつ** $1 \leq H < \infty$,
2. $d_R(x_k, x_l) \geq \tau$ for $k \neq l$,
3. $A_n \subset \{x \in R; d_R(x, x_n) \leq \tau - 2\sigma\}$,
4. $h(B_n \setminus A_n) \leq H$,

ここに d_R **は** R **における双曲距離を表し、**$B_n = B(x_n, \tau) = \{x \in R; d_R(x, x_n) < \tau\}$ **であるとする。すると** $R' = R \setminus \cup_n A_n$ **は** $h(R') \leq K$ **を満たす。ただしここで** K **は** $h(R), \sigma, \tau, H$ **にのみ依存する定数とする。**

仮定 $\tau < L(R)$ から B_n は単連結になることに注意する。$h(B_n \setminus A_n)$ が有界になるための十分条件は例えば A_n が連結であることが挙げられるが（補題８参照），それ以外には例えばこの定理自身を繰り返し用いることによってより複雑な条件も構成できるであろう。特に A_n としては閉円板 $\bar{B}(x_n, \varepsilon_n)$ を取り $\varepsilon_n \to 0$ とすればこの周りにいくらでも modulus の大きな分離円環領域が取れていくので、$\lambda(R') > 0$ かつ $L^*(R') = L(R') = 0$ となるリーマン面（平面領域）の例が構成できる。

3. 主定理の証明

まず主定理１を示すには $D \in \mathcal{D}_R$ に対して面積を周の長さで評価すればよい。直観的には短い曲線で出来るだけ大きな面積を囲もうと思えば閉測地線を用いればよいことが分かるであろう。実際に、ほとんどこのようなものだけについて評価すればよいことを主張するのが次の補題である。そこでまず全測地的な境界を持つような部分領域からなるクラスを定義しよう。ただし、puncture の周りだけは閉測地線で切り取れないので少し注意を要する。しかし、もともと puncture の周りは面積が有限なので、さほど怖がる必要

はない。そこで次の定義を採用する。$\mathcal{D}_R^{\mathrm{geod}}$ は R における双曲面積有限な R の部分領域で各相対境界成分が閉測地線からなるもの全体とする。また、次のようにおく。

$$h^{\mathrm{geod}}(R) = \sup_{D\in\mathcal{D}_R^{\mathrm{geod}}} \frac{|D|_R}{|\partial D|_R}.$$

すると次のことが分かる。

補題 7 ([7]). **解析的有限でなく基本群が非可換な双曲的リーマン面** R **に対して次の式が成り立つ。**

$$h^{\mathrm{geod}}(R) \le h(R) \le h^{\mathrm{geod}}(R) + 2.$$

実際、左辺はほぼ自明で、右辺は任意の $D \in \mathcal{D}_R$ に対して $|D| \le (h^{\mathrm{geod}}(R)+2)|\partial D|$ を示せば良いわけだが、これは次のようにすればよい。D の各境界成分をそれと自由ホモトピックな閉測地線または puncture に置き換えて得られる R の部分領域を D_0 とすれば D_0 は縮退していなければ $\mathcal{D}_R^{\mathrm{geod}}$ に属するはずである。一方、D と D_0 の集合としての差は作り方から単連結または 2 重連結にしかならない。よってこれらについての双曲面積は次の簡単な命題からそれらの周の長さによって評価出来る。このことから上の補題を得る。

補題 8. **単連結または** 2 **重連結領域** R **は** $h(R) = 1$ **を満たす。**

これは [7] に載っている補題であるが証明は直接計算するだけなので省略されている。知りたい読者は例えば [13] を参照のこと。

さて、このことから残るは $h^{\mathrm{geod}}(R)$ の評価のみということになった。求める評価式を示すにはもちろん $L^*(R) > 0$ と仮定してよい。$D \in \mathcal{D}_R^{\mathrm{geod}}$ の種数、puncture の個数、相対境界成分の個数をそれぞれ g', n', m としよう。もちろん仮定から $g' \le g, n' \le n$ である。D は全測地的境界を持っているので、Schottky double $\tilde{D}$ を取ればこれは解析的有限なリーマン面で種数 $G = 2g'+m-1$, puncture の個数が $N = 2n'$ となるようなものとなる。このようなリーマン面の双曲面積はよく知られているように $|\tilde{D}| = 2\pi(2G+N-2) = 4\pi(2g'+m+n'-2)$ である。従って、

$$|D|_R = |\tilde{D}|/2 = 2\pi(2g'+n'+m-2) \le 2\pi(2g+n+m-2)$$

となる。さて、ここで D の相対境界成分の長さは $L^*(R)$ 以上であるから特に $|\partial D|_R \ge mL^*(R)$ を得る。$(2g+n+m-2)/m = 1+(2g+n-2)/m \le \max\{2g+n-1, 1\}$ であることに注意すると次のような評価が可能である。

$$|D|_R \le 2\pi m \max\{2g+n-1, 1\} \le 2\pi|\partial D|_R \max\{2g+n-1, 1\}/L^*(R).$$

これより $h^{\mathrm{geod}}(R) \le 2\pi \max\{2g+n-1, 1\}/L^*(R)$ が得られ、補題 7 と合わせて主定理 1 を得る。

主定理 2 を示すにはまず次の簡単な補題に注意する。

補題 9. R **を双曲的リーマン面で** S **をその部分領域とする。** S **の部分集合** X **に対して** $\delta = d_R(X, \partial S) = \inf\{d_R(x, s); x \in X, s \in \partial S\}$ **とおく。このとき** S **の双曲計量は** X **上で** $1 \leq \rho_S/\rho_R \leq \coth\delta$ **を満たす。**

Proof. $r = \tanh\delta$ とおく。任意に $x_0 \in X$ を取り固定して、$p : \mathbb{D} \to R$ を正則な普遍被覆で $p(0) = x_0$ となるものとする。すると仮定から $\mathbb{D}_r = \{|z| < r\} = \{z \in \mathbb{D}; d_{\mathbb{D}}(0, z) < \delta\}$ は $\hat{S} = f^{-1}(S)$ に含まれる。よって Schwarz-Pick の補題により

$$1 \leq \rho_S(x_0)/\rho_R(x_0) = \rho_{\hat{S}}(0)/\rho_{\Delta}(0) = \rho_{\hat{S}}(0) \leq \rho_{\Delta_r}(0) = 1/r = \coth\delta,$$

を得る。 □

では主定理 2 の証明に移ろう。記号は定理の主張におけるものとする。さらに $D \in \mathcal{D}_{R'}^{\mathrm{geod}}$ を固定しておく。$|D|_{R'}$ を $|\partial D|_{R'}$ で上から評価すればよい。そのためにまず $B'_n = \{x \in R; d_R(x, x_n) < \tau - \sigma\}, N = \{n; D \cap B'_n \neq \emptyset\}$ とおく。すると $|D|_{R'} = |D \cap R''|_{R'} + \sum_n |D \cap B'_n|_{R'}$ と書くことが出来る。ただし、ここで $R'' = R \setminus \cup_n \bar{B}'_n$ とおいた。構成の仕方から $d_R(R'', \partial R') \geq \sigma$ かつ $d_{R'}(B'_n \setminus A_n, \partial B_n) \geq d_R(B'_n \setminus A_n, \partial B_n) \geq \sigma$ であることに注意すると補題 9 を用いて次の 2 つの評価

$$\begin{aligned}
|D \cap R''|_{R'} &\leq \coth^2\sigma \cdot |D \cap R''|_R \leq h(R)\coth^2\sigma \cdot |\partial(D \cap R'')|_R \\
&\leq h(R)\coth^2\sigma \cdot |\partial(D \cap R'')|_{R'} \\
&= h(R)\coth^2\sigma \left(|\partial D \cap R''|_{R'} + \sum_n |D \cap \partial B'_n|_{R'} \right),
\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}
|D \cap B'_n|_{R'} &\leq |D \cap B'_n|_{B_n \setminus A_n} \leq h(B_n \setminus A_n) |\partial(D \cap B'_n)|_{B_n \setminus A_n} \\
&\leq H \coth\sigma (|\partial D \cap B'_n|_{R'} + |D \cap \partial B'_n|_{R'}).
\end{aligned}$$

が得られる。ここでさらに各 n に対して $|\partial D \cap B_n|_{R'} \geq 2d_{R'}(B'_n, \partial B_n) \geq 2\sigma$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
|D \cap \partial B'_n|_{R'} &\leq |\partial B'_n|_{R'} \leq \coth\sigma |\partial B'_n|_R = \coth\sigma \cdot 2\pi \sinh(2\tau - 2\sigma) \\
&\leq \pi\sigma^{-1} \coth\sigma \sinh(2\tau - 2\sigma) |\partial D \cap B_n|_{R'},
\end{aligned}$$

であることが分かる。以上の評価を足し合わせて

$$\begin{aligned}
|D|_{R'} &\leq h(R)\coth^2\sigma |\partial D \cap R''|_{R'} + H\coth\sigma \sum_n |\partial D \cap B'_n|_{R'} \\
&\quad + (h(R)\coth^2\sigma + H\coth\sigma) \cdot \pi\sigma^{-1}\coth\sigma \sinh(2\tau - 2\sigma) |\partial D \cap B_n|_{R'} \\
&\leq (h(R)\coth^2\sigma + H\coth\sigma)(1 + \pi\sigma^{-1}\coth\sigma \sinh(2\tau - 2\sigma)) |\partial D|_{R'}.
\end{aligned}$$

を得る。最後の不等式と補題 7 から最終的に

$$\begin{aligned}
h(R') &\leq h^{\mathrm{geod}}(R') + 2 \\
&\leq (h(R)\coth^2\sigma + H\coth\sigma)(1 + \pi\sigma^{-1}\coth\sigma \sinh(2\tau - 2\sigma)) + 2
\end{aligned}$$

という具体的な定数 K の評価式を得る。

4. 種数が無限大の場合

前節の評価においては種数が有限であることを本質的に用いた。実際に、種数が無限大の場合には $L(R) > 0$ という条件が必ずしも $\lambda(R) > 0$ を意味しないということを具体例で見ることにしよう。そのような例は無限葉の被覆面を考えることにより得られる。

まず一般に $f : \hat{R} \to R$ が双曲的リーマン面の正則な（不分岐）被覆であるとする。このときは計量の入れ方から f は局所等長になっており従って $\hat{R}$ 内の任意の曲線 α に対して $|\alpha|_{\hat{R}} = |f_*(\alpha)|_R$ が成り立っている。このことから容易に $L(\hat{R}) \geq L(R)$ を得る。

このように length spectrum の底については被覆に関して非常に単純な関係があったが eigenvalue spectrum については組み合わせ的な条件が関係してくる。実際、次のような結果が知られている。

定理 10 (Brooks [2]). **R を種数 $g > 1$ のコンパクトリーマン面として $f : \hat{R} \to R$ をその上の不分岐かつ正則な Galois 被覆とする。このとき $\lambda(\hat{R}) = 0$ であるための必要十分条件は f の被覆変換群 $G = \{\gamma \in \mathrm{Aut}(\hat{R}); f \circ \gamma = f\} \cong \pi_1(R, *)/\pi_1(\hat{R}, *)$ が amenable であることである。**

ここで群の amebability の定義はしないことにする。興味のある読者は Brooks の論文を参照して頂きたい。大体の感じを言っておくと，群の Cayley グラフを書いた時に頂点が指数函数的に広がっていく場合が amenable でない、ということである。例えば可換群は amenable だが、例えば非可換自由群を含めばその群は amenable ではないことが分かる。従って、例えば可換な被覆変換群を持つような無限葉の Galois 被覆を作れば、被覆面 $\hat{R}$ は上の定理から $\lambda(\hat{R}) = 0$ を満たすが，先の注意から $L(\hat{R}) > 0$ が言えるので主定理１が無限種数では成り立たないような例になっている。

上の Brooks の定理は必要性を言うのが難しいのであって、十分性は容易である。従って例えばコンパクトでなくても、R が解析的有限であれば $f : \hat{R} \to R$ が正則な不分岐 Galos 被覆で被覆変換群が amenable ならば $\lambda(\hat{R}) = 0$ であることは等周定数を考えることによって簡単に分かる。従って、例えば $\hat{R} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$ の作用で割って得られる被覆 $\hat{R} \to (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})/\mathbb{Z} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ を考えれば $\lambda(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) = 0$ が分かるが、明らかに $L^*(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) > 0$ である。従ってこれは種数が有限（この場合は種数は 0）ではあるが $L^*(R) > 0$ という条件が $\lambda(R) > 0$ を必ずしも導かないという例になっている。

なお、種数が無限大の面に対する $\lambda(R) > 0$ を特徴付ける一般的な結果のようなものは知られていないと思われる。ここでは最後に Brooks による一つの定理を紹介しておこう。R 内の一点 x_0 を固定してそれを中心とした metric ball を考える。つまり $B_r := \{x \in R; d_R(x, x_0) < r\}$ とおく。これについて

$$\mu(R) := \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r} \log \mathrm{vol}(B_r)$$

と定める。この値が最も大きくなるのは R が単連結の場合だが、その場合は直接計算で $\mu(\mathbb{D}) = 2$ となることが分かるので、任意の R に対しても常に $\mu(R) \le 2$ が成り立つことは言える。これに対して次が成り立つ。

定理 11 (Brooks [1]).

$$\frac{1}{\mu(R)} \le h(R).$$

従って、特に $\mu(R) = 0$ ならば $\lambda(R) = 0$ である。

Proof. $v(r) = \mathrm{vol}(B_r) = |B_r|_R$ とおくと $v'(r) = |\partial B_r|_R$ が成り立つ。従って $v'(r)/v(r) \ge 1/h(R)$ が分かるが、この微分不等式を解けば $\log v(r)/v(r_0) \ge r/h(R)$ $(r > r_0)$ を得る。これより $\mu(R) \ge 1/h(R)$ が従う。 □

References

[1] Brooks, R. A relation between growth and the spectrum of the Laplacian, *Math. Z.*, **178** (1981), 501–508.

[2] Brooks, R. The bottom of the spectrum of a Riemannian covering, *J. Rine Angew. Math.*, **357** (1985), 101–114.

[3] Burger, M. and Canary, R. D. A lower bound on λ_0 for geometrically finite hyperbolic n-manifolds, *J. reine angew. Math.*, **454** (1994), 37–57.

[4] Buser, P. A note on the isoperimetric constant, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **15** (1982), 213–230.

[5] Chavel, I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York (1984).

[6] Fernández, J. L. Domains with strong barrier, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **5** (1989), 47–65.

[7] Fernández, J. L. and Rodríguez, J. M. The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **15** (1990), 165–183.

[8] Kanai, M. Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of noncompact Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **37** (1985), 391–413.

[9] Nicholls, P. J. *The Ergodic Theory of Discrete Groups*, Cambridge University Press, Cambridge (1989).

[10] Niebur, D. and Sheingorn, M. Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 239–258.

[11] Roe, J. An index theorem on open manifolds. I, *J. Diff. Geom.*, **27** (1988), 87–113.

[12] Sugawa, T. Various domain constants related to uniform perfectness, to appear in Complex Variables.

[13] Sugawa, T. On the bottom of spectra of open Riemann surfaces, In preparation (1997).

[14] Sullivan, D. Related aspects of positivity in Riemannian geometry, *J. Diff. Geom.*, **25** (1987), 327–351.