ON HÖLDER CONTINUITY OF GREEN'S FUNCTION

須川 敏幸　　京都大学・理学部

この講演では平面領域の Green 函数の境界における Hölder 連続性について論じる。点 a に極を持つ平面領域 $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 上の Green 函数を $G_D(z,a)$ で表す。簡単のためにここでは D は Dirichlet の意味で正則であると仮定する。まず次の結果が出発点となる。$0 < \alpha < 1$ を定数とする。

定理 1 (Carleson [1]). $\mathbb{R}^m$ **内のコンパクト集合が** α-Hölder **連続な調和函数に関して除去可能な特異点集合であるための必要十分条件は** $m-2+\alpha$ **次元** Hausdorff **測度が** 0 **であることである。**

従って特に平面上の内点を持たないコンパクト集合 E の補集合 $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ の ∞ に極を持つ Green 函数が全平面に α-Hölder 連続函数に拡張できればこの結果から集合 E の Hausdorff 次元は α 以上でなければならないことが分かる。また、特に Hausdorff 次元が 0 であるような Dirichlet 正則集合の外部の Green 函数は Hölder 連続には拡張できないことも分かる。

Green 函数が Hölder 連続に拡張できるかどうかについては条件を一変数化出来る点で次の命題が使いやすい。$D \subset \mathbb{C}$ を領域として $\delta_D(z) = \inf_{w \in \partial D} |z-w|$ とおく。

補題 2. **領域** D **上の正値調和函数** h **に対して次の条件は同値である。**

1. **ある正定数** C_1 **が存在して** $|h(z)-h(w)| \le C_1|z-w|^\alpha$ **が任意の** $z, w \in D$ **で成り立つ。**
2. **ある正定数** C_2 **が存在して** $h(z) \le C_2 \delta_D(z)^\alpha$ **が任意の** $z \in D$ **で成り立つ。**

（上記において、実際には $C_2 \le C_1 \le 2^{1+\alpha} C_2$ に取れる。）

これに注意すれば、Green 函数の Hölder 連続性は境界における減少のオーダーをみれば良いことになる。

実は次のことが教科書 [2] には証明抜きで書かれている。

定理 3. ∞ **を含む平面領域が一様完全な境界を持てばその上の** ∞ **を極に持つ** Green **函数は平面全体に** Hölder **連続に拡張できる。**

ここで $\widehat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合 E が一様完全とは、E の外部に含まれる円環領域で E を分離するものの modulus が一様に上から押さえられることをいう。実際には上記の Hölder 指数はその modulus の上界によってある程度具体的に評価することが出来る。上の結果から特に一様完全集合の Hausdorff 次元の下からの評価が得られる（cf. [2], [3]）。

逆に「Green 函数が Hölder 連続に拡張できるならばその境界は一様完全か？」という問題が生ずる。これについて、今回次のような反例が得られたので報告する。

定理 4. **任意の定数** $0 < \alpha \le 1$ **に対して** Green **函数が境界まで** α-Hölder **連続に拡張できるがその境界は一様完全ではなく，なおかつ** Dirichlet **正則な平面領域が存在する。**

実際には次のように構成できる。$\delta_n > 0$ を 0 に収束するように任意に取り、非負整数 n に対して $D_0 = \{|z| < 1/2\}$, $D_n = \{z \in \mathbb{C}; \delta_n < |z - 2n| < 1/2\}$ $(n \geq 1)$ とおく。これに対して $\varepsilon_n \in (0, 1/2)$ を十分小さく取れば、

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} (D_n \cup P_n)$$

が求める領域となる。ただし、ここに $P_n = \{z = x + iy; |x - (2n+1)| < 1, |y| < \varepsilon_n\}$ とする。

References

[1] Calreson, L. Removable singularities of continuous harmonic functions on $\mathbb{R}^m$, *Math. Scand.*, **12** (1963), 15–18.

[2] Carleson, L. and Gamelin, T. W. *Complex Dyamics*, Springer-Verlag (1993).

[3] Sugawa, T. Various domain constants related to uniform perfectness, to appear in Complex Variables.