HOLOMORPHIC MOTIONS AND QUASICONFORMAL EXTENSION

須川 敏幸　　京都大学・理学部

この講演ではいわゆる λ-lemma を用いて単葉性定理が擬等角拡張性定理にパワーアップされる事例についてみてみる。なかなか一般的な枠組みで説明するのは難しいが、具体的にいくつかの例について見ていけば使い方は分かっていただけるものと思う。

まず E をリーマン球面の任意の部分集合とする。$\mathbb{D}$ を単位円板として写像 $F : E \times \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が集合 E の正則運動 (holomorphic motion) であるとは次の 3 条件を満たすこととする。

1. $z \in E$ を固定すれば $F(z, \cdot) : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は正則、
2. $\lambda \in \mathbb{D}$ を固定すれば $F_\lambda := F(\cdot, \lambda) : E \to \widehat{\mathbb{C}}$ は単射、
3. $F_0 = \mathrm{id}_D$.

これについて次のことが成り立つ。（F には 2 変数函数としての連続性などの仮定は一切おかない。なお、実際にはもっと強い主張が成立するが、それについては例えば [2] などを参照のこと。）

定理 1 (λ-lemma [4], [1]). F **は** $\overline{E} \times \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ **に連続に拡張できる。各** $\lambda \in \mathbb{D}$ **に対して** F_λ **は** $\widehat{\mathbb{C}}$ **の** $|\lambda|$**-擬等角自己同型に拡張できる。**

ここでは同相写像 f が k-擬等角であるとは f が局所 2 乗可積分な（超函数としての）微分を持ち、Beltrami 係数 $\mu_f = f_{\bar{z}}/f_z$ が $|\mu_f| \leq k$ a.e. を満たすことであると約束する。

これを用いて擬等角拡張に関する結果がどのようにして得られるか具体例で見ていく。まず作用素 $P_f = f'$ を考える。これについては次の結果が知られている。

定理 2 (能代-Warschawski). D **を凸領域として正則写像** $f : D \to \mathbb{C}$ **が定数** $\beta \in \mathbb{R}$ **に対して** $\mathrm{Re}(e^{\beta i} f') > 0$ **を満たすならば** f **は単葉である。**

そこで凸領域 D 上の正則函数 f で点 $a \in D$ 上で $f(a) = 0$ と正規化されたものを考える。ある $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ に対して $\mathrm{Re}(e^{\beta i} f'(z)) > 0$ が成り立つとする。つまり、$f'(D) \subset U_\beta = L_\beta(\mathbb{D})$ とする。ここに $L_\beta(z) = (1 + e^{2\beta i} z)/(1 - z)$ とする。そこで正則函数の族 $F_\lambda : D \to \mathbb{C}$ を $F_\lambda(a) = 0$ かつ $F'_\lambda(z) = L_\beta(\lambda L_\beta^{-1}(f'(z)))$ を満たすものとして定めるとこれは D の正則運動となる。従って、特に F_k は k-擬等角拡張可能である。このことから次の結果を得る。

定理 3. **凸領域** D **上の正則函数** f **で** f' **が** $f'(D) \subset L_\beta(B_k)$ **を満たせば** f **は全平面の** k**-擬等角写像に拡張できる。**

なお、ここで $B_k = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq k\}$ であり、

$$L_\beta(B_k) = \left\{ z \in \mathbb{C}; \left| z - \frac{1 + e^{2i\beta} k^2}{1 - k^2} \right| \leq \frac{2k \cos\beta}{1 - k^2} \right\}$$

であることに注意する。なお、この結果から直ちに近接凸函数 (close-to-convex function) についての結果を得る。

系 4. **$\mathbb{D}$ 上の 0 を固定する凸函数 g で k_1-擬等角拡張を持つものに対して $\mathbb{D}$ 上の 0 を固定する正則函数 f が $f'(z)/g'(z) \in L_\beta(B_{k_2})$ $(z \in \mathbb{D})$ を満たせば f は全平面の $(k_1+k_2)/(1+k_1k_2)$-擬等角写像に拡張できる。**

また、簡単な計算から $\{z \in \mathbb{C}; |z-1| \le k\} \subset L_0(B_{k'})$, ここに $k' = k/(2-k)$, であることが分かるので別の系として次の結果を得る。

系 5. **$\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ は正則函数で $|\omega'(z)| \le k|z|$ を満たしているとする。このとき正則函数 $f(z) = z + \omega(z)$ は全平面に k'-擬等角拡張できる。**

これは [3] Theorem 2' の精密化になっている。

次に作用素 $P_f(z) = zf'(z)/f(z)$ について考える。ただし、ここで f は単位円板上の正則函数で $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ のように正規化されているとする。すると、$P_f(\mathbb{D}) \subset U_\beta$ であるような f は β-spirallike function と呼ばれ、単葉になることが分かっている。従ってこのとき単位円板上の正規化された正則函数 F_λ を $P_{F_\lambda} = L_\beta(\lambda L_\beta^{-1}(P_f))$ によって定めれば容易に分かるように F_λ は $\mathbb{D}$ の正則運動を定める。従って特に λ-lemma から F_k は k-擬等角拡張出来る。F_k を F に読み替えれば次の結果を得る。

定理 6. **単位円板上の正規化された正則函数 f が $\mathbb{D}$ 上で $zf'(z)/f(z) \in L_\beta(B_k)$ を満たせば f は全平面に k-擬等角拡張出来る。**

なお、この結果は特に $\beta = 0$ の場合には best possible である。実際、$zf'(z)/f(z) = L_0(kz^2)$ を満たすものは極値的な k-擬等角拡張を持ち、従ってそれ以上擬等角性が良くならないことが分かる。

単位円板上の正規化された正則函数上の作用素 $P_f(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$ についても同様に $P_f(\mathbb{D}) \subset U_0 = \{\mathrm{Re} z > 0\}$ ならば f は凸函数となり特に単葉であることが分かる。従って上記と同様の手法により次の結果を得る。

定理 7. **単位円板上の正規化された正則函数 f が $\mathbb{D}$ 上で $1 + zf''(z)/f'(z) \in L_0(B_k)$ を満たせば f は全平面に k-擬等角拡張出来る。従ってこのとき $\|S_f\|_{\mathbb{D}} \le 2k$ が成り立つ。**

ただし、ここに S_f は f の Schwarz 微分であり、$\|S_f\|_{\mathbb{D}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^2|S_f(z)|$ である。

References

[1] Bers, L. and Royden, H. L. Holomorphic families of injections, *Acta Math.*, **157** (1986), 259–286.

[2] Earle, C. J., Kra, I. and Krushkal', S. L. Holomorphic motions and Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **343** (1994), 927–948.

[3] Fait, M., Krzyż, J. G. and Zygmunt, J. Explicit quasiconformal extensions for some classes of univalent functions, *Comment. Math. Helv.*, **51** (1976), 279–285.

[4] Mañé, R., Sad, P. and Sullivan, D. On dynamics of rational maps, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **16** (1983), 193–217.