NORM ESTIMATES OF THE PRE-SCHWARZIAN DERIVATIVES FOR CERTAIN CLASSES OF UNIVALENT FUNCTIONS

須川 敏幸　京都大学・理学部

YONG CHAN KIM　YEUNGNAM UNIVERSITY

単位円板上の一様局所単葉正則函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, つまりある定数 $\rho>0$ に対して単位円板内の任意の半径 $\rho>0$ の双曲円板において単葉であるような正則函数についてその前 Schwarz 微分の双曲ノルム

$$\|T_f\|=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|T_f(z)|<\infty$$

を通して様々な解析的性質について述べることが出来るということを前回の学会で報告した ([1])。

T_f は 1 次函数の後からの合成に関して不変なので以後では $f(0)=f'(0)-1=0$ と正規化された単位円板上の正則函数のみを考える。このような函数全体を $\mathcal{A}$ と表すことにする。

この講演では近接凸函数 (close-to-convex functions) を中心にその具体的なノルム評価について述べることにする。関連する結果が [5] にあるが我々の定式化はそれとは若干異なるものである。(一方が他方に包含されるというわけではない。)

以下は [2] の結果の一部である。まず $\mathcal{M}$ を単位円板 $\mathbb{D}$ 上の単葉函数 φ で $\varphi(z)\neq 0$ かつ $\varphi(0)=1$ を満たすもの全体のなす集合とする。さらに $\mathcal{M}_p$ をその部分族で実部が常に正であるもの全体、$\mathcal{M}_s$ でさらにその部分族で像が 1 に関して星状かつ実軸に関して対称、かつ $\varphi'(0)>0$ を満たすものとする。

$\varphi\in\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}^*(\varphi)$ および $\mathcal{K}(\varphi)$ をそれぞれ条件 $zf'(z)/f(z)\prec\varphi(z)$ および $1+zf''(z)/f'(z)\prec\varphi(z)$ を満たすもの全体として定義する。ここで記号 $\psi\prec\varphi$ はいわゆる subordination を表すものとする。すなわち、ある正則函数 $\omega:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ で $\omega(0)=0$ かつ $\psi=\varphi\circ\omega$ を満たすものが存在することを言う。今の場合は φ が単葉だからこの条件は $\psi(0)=\varphi(0)$ かつ $\psi(\mathbb{D})\subset\varphi(\mathbb{D})$ に等しい。さらに $\psi,\varphi\in\mathcal{M}$ としたとき $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ をある $h\in\mathcal{K}(\varphi)$ が存在して $f'/h'\prec\psi$ となるもの全体として定義する。

これらは星状函数、凸函数、近接凸函数の定義を一般化したものになっている。特に $\psi,\varphi\in\mathcal{M}_p$ ならば $\mathcal{S}^*(\varphi),\mathcal{K}(\varphi),\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ は単葉函数族 $\mathcal{S}$ に含まれる。また、$f\in\mathcal{S}^*(\varphi)$ とすればその Alexander 変換 $g(z)=\int_0^z t^{-1}f(t)dt$ は $\mathcal{K}(\varphi)$ に属するから $zf'/f=f'/g'\in\varphi$ より実は $\mathcal{S}^*(\varphi)\subset\mathcal{C}(\varphi,\varphi)$ となっている。従って、以下では $\mathcal{K}(\varphi),\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ に対して評価を与えることを考える。

$\varphi\in\mathcal{M}$ に対して $h_\varphi,k_\varphi\in\mathcal{A}$ を関係式

$$\frac{zh_\varphi'(z)}{h_\varphi(z)}=\varphi(z),\quad 1+\frac{zk_\varphi''(z)}{k_\varphi'(z)}=\varphi(z),$$

を満たすものとして定義すると、容易に想像されるようにしばしばこれらの函数が上記の族において極値函数としての役割を果たす。例えば [3] を参照されたい。実際、我々は次の結果を得る。

定理 1. $\varphi \in \mathcal{M}_s$ **ならば任意の** $f \in \mathcal{K}(\varphi)$ **は次の不等式を満たす。**

$$\|T_f\| \le \|T_{k_\varphi}\|.$$

形からこの評価は best possible である。$\|T_{k_\varphi}\|$ の値は個々の φ に対して計算するしかない。少なくとも $\|T_{k_\varphi}\| \le 4$ が成り立つことは注意しておく（以下の例で $A = 1, B = -1$ とした場合）。

次に $\mathcal{C}(\psi, \varphi)$ に対しては次の結果を得る。ただし、一般には sharp かどうかは分からない。

定理 2. $\psi \in \mathcal{M}$ **かつ** $\varphi \in \mathcal{M}_s$ **とすると、任意の** $f \in \mathcal{C}(\psi, \varphi)$ **に対して次の評価式が成り立つ。**

$$\|T_f\| \le V_{\mathbb{D}}(\psi) + \|T_{k_\varphi}\|.$$

ただしここに $V_{\mathbb{D}}(\psi) = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |\psi'(z)/\psi(z)|$ とする。

この量 $V_{\mathbb{D}}(\psi)$ については $\psi \in \mathcal{M}_p$（より一般に Gelfer 函数 ψ）に対して不等式 $V_{\mathbb{D}}(\psi) \le 2$ が成り立つことが基本的である。（これが Macintyre の不等式から従うことを最近山下慎二氏から教わった。cf. [4]）応用上はこの値がいつ真に 2 より小さくなるかを知ることが重要であるが、このための十分条件については講演の際に述べることにしたい。また、上に述べたことと合わせてこの結果から $\psi \in \mathcal{M}_p$ に対しては $\|T_f\| \le 6$ という単葉函数についてよく知られた結果が従うことにも注意しておこう。

上記の設定において具体例として非常に重要となるのが函数 $\varphi_{A,B}(z) = (1+Az)/(1+Bz)$ である（ただしここに $-1 \le B < A \le 1$ とする）。これらについては具体的に

$$\|k_{\varphi_{A,B}}\| = \frac{2(A-B)}{1+\sqrt{1-B^2}},$$
$$V_{\mathbb{D}}(\varphi_{A,B}) = \frac{2(A-B)}{1 - AB + \sqrt{(1-A^2)(1-B^2)}}$$

と計算できる。この結果から、いくつかの古典的な函数族に関するノルム評価を得る。

References

[1] Kim, Y. C. and Sugawa, T. Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk, preprint (1998).

[2] Kim, Y. C. and Sugawa, T. Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions, preprint (1998).

[3] Ma, W. and Minda, D. A unified treatment of some special classes of univalent functions, Proceedings of the Conference on Complex Analysis (eds.Li, Z., Ren, F., Yang, L. and Zhang, S.), International Press Inc. (1992).

[4] Yamashita, S. The derivative of a holomorphic function and estimates of the Poincaré density, *Kodai Math. J.*, **15** (1992), 102–121.

[5] Yamashita, S. Norm estimates for function starlike or convex of order alpha, to appear in Hokkaido Math. J. (1998).