函数論に現れる様々な等角不変計量および距離について

須川 敏幸　　京都大学・理学部
TOSHIYUKI SUGAWA　　KYOTO UNIVERSITY

Abstract. この講演では一変数函数論に現れる種々の等角不変計量について統一的に述べ、関連する問題を明示する。

1. 等角不変計量

R を（連結な）リーマン面とする。R 上の正値な $(1/2,1/2)$-形式 σ_R を R 上の**等角計量**と呼ぶ。すなわち、R の任意の局所座標 $z=z(p):U\to V\subset\mathbb{C}$ に対して

$$\sigma_R=\sigma_R(z)|dz|$$

と表示できて $\sigma_R(z)$ が $V=z(U)$ 上の正値函数であるようなものを等角計量と呼ぶ。

Remark. 正確には $\sigma_R(z)$ は座標 z の取り方にも依存するが便宜上上のような書き方をする。さらにくどく言えば、厳密な定義は例えば次のようにすればよい。$(\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha)_{\alpha\in A}$ を R の複素構造を定める (maximal な) 局所座標の族とする。すなわち $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ は R の開被覆で複素平面の中への同相写像 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha$ は $\varphi_{\beta\alpha}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ が双正則写像となるようなものとする。このとき、V_α 上の正値函数の族 $\sigma_{R,\alpha}$ $(\alpha\in A)$ が与えられていて、しかも関係式

$$\sigma_{R,\beta}(\varphi_{\beta\alpha}(z))|\varphi'_{\beta\alpha}(z)|=\sigma_{R,\alpha}$$

が任意の $\alpha,\beta\in A$ に対して $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上で成り立っているとき、この族を σ_R と書くことにしてこれを等角計量と呼ぶわけである。**しかしながら、実際の計算などにおいてこのような厳密な定義にとらわれる必要はない。**あるいは、慣れるまでは当面 R は全て平面領域だと思って、z を大域的座標として $\sigma_R=\sigma_R(z)|dz|$ と書いたとき $\sigma_R(z)$ を大域的に定義された函数であると思っても良いだろう。

なお、通常は係数 $\sigma_R(z)$ は連続であるものを考えることが多いが、場合によっては Borel 可測であって 1 次元方向に局所可積分であるようなものを考えることもある。以下では具体的なものを扱うことが多いので、この点についてはあまり気にしないことにする。

また、より一般に半正値 (つまり $\sigma_R(z)\geq 0$ であるよう) な $(1/2,1/2)$-形式を**等角擬計量**と呼ぶ。

Remark. このようなものはもちろんリーマン (擬) 計量とみなすことが出来る。しかし、以下で考える例を多変数の場合などに拡張しようとする場合、しばしばリーマン計量とはならない。従って、これらをリーマン計量のような接空間上の「内積」として考えるよりも、複素接空間上の「(セミ) ノルム」として捉えた方が一般性があると思われる。このようなものはしばしば (擬)Finsler 構造と呼ばれる。その際は「等角」という接頭辞は外しておいた方がよい。

Date: 湯河原, 29 July, 1999.

簡単のために σ_R を R 上の連続な等角 (擬) 計量としよう。このとき、σ_R から次のように R 上の (擬) 距離が定まる：

$$\sigma_R(p,q) = \inf_\gamma \int_\gamma \sigma_R(z)|dz|,$$

ただしここに下限は点 $p,q \in R$ を結ぶ区分的 C^1 級の R 内の曲線全てにわたって取るものとする。ここで、この下限を達成する R 内の曲線を p,q を結ぶ (σ_R に関する) 測地線と呼び、任意の 2 点に対して常に測地線が存在する時にこの計量は**測地的**であるという。

逆に、R 上の (擬) 距離 δ が与えられているとき、各点 p に対して次の極限

$$\sigma_R(z(p)) = \lim_{q\to p} \frac{\delta(q,p)}{|z(q)-z(p)|}$$

が p における局所座標 z に対して定まれば、$\sigma_R(z)|dz|$ が (一般には) 等角擬計量を与える。しかし σ_R から定まる距離が元の δ と一致するとは限らない。

以下では主に等角 (擬) 計量及びそれから定まる距離のみを扱うが、実際には最初に距離が何らかの方法で定義されることも多いので、その“ 微小形式 ”を見つけるというのは大きな問題の一つである。この講演ではそれについてはあまり触れないことにする。

写像 $f: R \to R'$ をリーマン面の間の正則写像とする。このとき、R' 上の等角擬計量 $\sigma_{R'}$ の f による**引き戻し** (pull-back) $f^*(\sigma_{R'})$ を

$$f^*(\sigma_{R'})(z) = \sigma_{R'}(f(z))|f'(z)|$$

によって定義する。$\sigma_{R'}$ が等角計量であっても、f の微分が消えているところでは引き戻しの係数が消えることになるので、一般には引き戻しは上の意味の計量になるとは限らない。

さて、以下では σ は**全ての**リーマン面 R 上で定義された等角擬計量の族 σ_R を表すものとする。(従って、正確には $\sigma = (\sigma_R)_R$ と書くべきかもしれない。) この族が**等角不変**であるとは、任意の双正則写像 $f: R \to R'$ に対して $f^*(\sigma_{R'}) = \sigma_R$ が成り立つことを言う。さらに、この族が**正規化されている**とは単位円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ と原点に対しては

$$\sigma_{\mathbb{D}}(0) = 1$$

が成り立っていることをいう (ここで $\sigma_{\mathbb{D}}(z)$ は大域座標 z で考えた時の密度を表す)。$\sigma_{\mathbb{D}}$ は等角不変であったから、任意の $z \in \mathbb{D}$ に対しては写像 $f(\zeta) = (\zeta + z)/(1 + \bar{z}\zeta)$ を考えれば $\sigma_{\mathbb{D}}(f(0))|f'(0)| = \sigma_{\mathbb{D}}(0) = 1$ だから

$$\sigma_{\mathbb{D}}(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$$

が成り立つことが分かる。

この計量 $|dz|/(1-|z|^2)$ はしばしば双曲計量または Poincaré 計量と呼ばれ、非常に重要なものである。実際、直接計算によって分かるようにこれは Aut ($\mathbb{D}$) による引き戻しの作用によって不変になっている。従って、$\mathbb{D}$ をその上に作用する Fuchs 群で割って得られるリーマン面 R においても計量を誘導し、その計量もまた双曲計量と呼ばれる。

また、$\mathcal{F}$ をリーマン面間のある morphism の族を表すものとするとき、σ が $\mathcal{F}$-**縮小的**であるとは、任意の $f \in \mathcal{F}(R,R')$ に対して $f^*(\sigma_{R'}) \le \sigma_R$ が成り立つことをいう。特にリーマン面間の全ての正則写像の族 $\mathcal{O}(R,R')$ に対して σ が縮小的であると

きは、単に縮小的であるという。もちろん、縮小的ならば等角不変である。以下でよく用いられるのは、他に R から R' への単射な正則写像全体の族 $\mathcal{S}(R,R')$ である。

また、各リーマン面 R の部分領域 R_1 に対して $\sigma_R \le \sigma_{R_1}$ が R_1 上で成立するとき、σ は**単調**であるという。

こららに対して実は次のことが成立することが容易に分かる。

補題 1.1. **σ を等角擬計量の族とするとき、次は同値である。**

1. **σ は $\mathcal{S}$-縮小的,**
2. **σ は等角不変かつ単調。**

以下の節では、まずいくつかの具体例を見て、それらがどのような性質を持っているか検証する。また、それらの計量が函数論の古典的な問題とどのように関係しているのかを説明していきたい。

なお、以下のような取り扱いについては、[1] や [4] から大いに inspire されたことを付け加えておきたい。

2. 具体例

以下ではまずいくつか具体的に計量を定義する。本当は局所座標を取って議論すべきであるが、あまり細かく厳密性に拘っていると本質を見失うおそれがあるのであたかもリーマン面 R が平面領域であるかのように定義した部分もあるが、それについては各自で正しい定義を考えて欲しい。

また、以下の例でも分かるように計量についてより深い性質を知るためにはその定義に関わる極値問題の解についての深い理解を必要とする。

例 1 (小林計量 k_R).

$$k_R(z) = \inf\left\{\frac{1}{|\varphi'(0)|}; \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, R), \varphi(0) = z\right\}.$$

この計量は Schwarz の補題から容易に分かるように縮小的であり、正規化されている。さらに、本質的にはいわゆる双曲計量または Poincaré 計量と同じものになる。すなわち次が成立する。

補題 2.1. **R が $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ または 1 次元トーラスに正則同値であるならば $k_R = 0$ で、それ以外の場合は k_R は双曲計量に一致する。**

証明. $\pi : D \to R$ を正則な普遍被覆写像とする。ここで D はリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$, 複素平面 $\mathbb{C}$ または単位円板 $\mathbb{D}$ のいずれかに等しいとする。定義から容易に分かるように $k_{\widehat{\mathbb{C}}} = 0, k_{\mathbb{C}} = 0$ である。一方、縮小性から $\pi^* k_R \le k_D$ が成り立つから、特に $D = \widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ の場合、すなわち定理の前半の仮定が成り立つ場合は $k_R = 0$ が従う。

次に $D = \mathbb{D}$ の場合を考える。与えられた点 $z \in R$ に対して普遍被覆 π を $\pi(0) = z$ となるように選ぶ。すると任意の $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, R)$ で $\varphi(0) = z$ を満たすものについて、その持ち上げ $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $\psi(0) = 0$ なるものを取ることが出来るので (つまり $\pi \circ \psi = \varphi$)、Schwarz の補題から

$$|\varphi'(0)|/|\pi'(0)| = |\psi'(0)| \le 1$$

を得る。この π 自身も $k_R(z)$ の定義における φ の条件を満たしていることに注意すれば、このことからこの定義で下限を達成するのは π あるいはその“ 回転 ”に限ることが分かり、特に $k_R(z) = 1/|\pi'(z)|$ であることが分かる。これは $\pi^*(k_R) =$

$|dz|/(1-|z|^2)=k_{\mathbb{D}}$であることを意味し、双曲計量の定義から$k_R$が双曲計量に他ならないことが分かる。 □

例 2 (Carathéodory-Reiffen 計量 c_R).

$$c_R(z)=\sup\{|\varphi'(z)|;\varphi\in\mathcal{O}(R,\mathbb{D}),\varphi(z)=0\}.$$

この量$c_R(z)$はしばしば(zに関する)解析容量(analytic capacity)とも呼ばれる。上の定義で上限を達成する函数$\varphi\in\mathcal{O}(R,\mathbb{D})$はしばしばAhlfors函数と呼ばれ、$R\notin O_{AB}$である限り$z$を決めればそれに対して一意的に存在することが知られている(例えば、[3]などを参照のこと)。なお、最後の条件$\varphi(z)=0$は実は極値性から自動的に従うことにも一応注意しておく(特に以下では必要ないが)。

また、これもSchwarzの補題から容易に分かるように、この計量c_Rもまた縮小的である。

$\omega=\omega(z)dz$をリーマン面R上の正則微分(holomorphic 1-form)とする。これに対して次で定義されるノルムを考える：

$$\|\omega\|_R^2=\frac{-1}{2\pi i}\iint_R\omega\wedge\bar{\omega}=\frac{1}{\pi}\iint_R|\omega(z)|^2dx\wedge dy.$$

このノルムが有限となるようなR上の正則微分全体のなす空間$\Omega(R)$は内積

$$(\omega,\eta)_R=\frac{-1}{2\pi i}\iint_R\omega\wedge\bar{\eta}$$

に関してHilbert空間となるが、この空間をBergman空間と呼びそのHilbert空間としての核函数$K_R(z,w)=K_R(z,w)dzd\bar{w}$をBergman核と呼ぶ。(ただし、ここではノルムの入れ方が通常とπだけ異なるため、通常のBergman核とはやはりπだけ異なっていることに注意してほしい。)すなわち、各点$w\in R$に対してpoint evaluation $V_w:\omega\mapsto\omega(w)$は$\Omega(R)$上の有界線型汎函数となるので、Riesz-Fisherの表現定理により$V_w(\omega)=(\omega,\omega_w)_R$を満たす$\omega_w\in\Omega(R)$が一意的に存在する。そこで、それを$K_R(z,w)dzd\bar{w}=\omega_w(z)dzd\bar{w}$と書き表すわけである。

例 3 (Bergman 核 b_R).

$$b_R(z)=\{|\omega(z)dz|;\omega\in\Omega(R),\|\omega\|\le 1\}.$$

この量はまさしくpoint evaluation V_zの作用素ノルムそのものであることに注意せよ。一方、

$$|V_w(\omega)|\le\|\omega\|_R\|\omega_w\|_R$$

であり等号は$\omega=\omega_w$の時達成されるのだから、これより$\|V_w\|=\|\omega_w\|_R$である。また$0<\|\omega_w\|_R^2=V_w(\omega_w)=\omega_w(w)=K_R(w,w)$より$\|\omega_w\|_R=\sqrt{K_R(w,w)}$を得るので次の表現式を得る。

$$b_R(z)=\sqrt{K_R(z,z)}.$$

また、単位円板のBergman核は$K_{\mathbb{D}}(z,w)=(1-z\bar{w})^{-2}$であるから特に$b$は正規化されていることが分かる。さらに容易に分かるようにbは等角不変かつ単調な等角擬計量である。

Remark. 先にも書いたように、通常の Bergman 核とは因数 π だけ異なることに注意せよ。また、通常 Bergman 計量と呼ばれているものは、$\partial_z\partial_{\bar z}\log K_R(z,z)dzd\bar z$ で与えられる Hermite 計量のことであるので、混同されないように。

例 4 (span 計量 s_R).

$$s_R(z)=\sup\{|\varphi'(z)|;\varphi\in\mathcal{O}(R,\mathbb{C}),\|d\varphi\|_R\le 1\}.$$

この量はしばしば span と呼ばれている。微分 d による $\mathcal{O}(R,\mathbb{C})$ の像と $\Omega(R)$ との共通部分を $\Omega_{\mathrm{e}}(R)$ と表すことにすると、これは要するに R 上の 2 乗可積分な完全微分の全体で $\Omega(R)$ の閉部分空間となるから、これ自身やはり Hilbert 空間の構造を持つ。その核函数を同様に $K_R^{\mathrm{r}}(z,w)$ と書き、これを被約 Bergman 核と呼ぶことにする。すると先の考察と同様にして

$$s_R(z)=\sqrt{K_R^{\mathrm{r}}(z,z)}$$

であり、さらに s は正規化された等角不変な単調等角擬計量であることも分かる。

また、定義から明らかに $K_R^{\mathrm{r}}(z,z)\le K_R(z,z)$ であるから、$s_R\le b_R$ を得る。

この計量に関する極値問題の解は、要するに Dirichlet 積分が最小となるような正則写像ということになり、古典的に非常によく調べられている。実際、極値截線写像と深い関係があることが知られている。

例 5 (対数容量 r_R).

$$r_R(z)=\lim_{w\to z}\exp(-G_R(z,w)-\log|w-z|),$$

ただしここに $G_R(z,w)$ は w において極を持つ R の Green 函数とする。Green 函数が存在しない場合は $r_R=0$ としておく。

最初に一応断っておいたものの、上の定義はあまりにひどいのでもう少し説明を加えておく。実際には z を点 $p\in R$ における局所座標とするとして、$r_R=r_R(z)|dz|$ と表せば実際には

$$r_R(z(p))=\lim_{q\to p}\exp(-G_R(q,p)-\log|z(q)-z(p)|)$$

と定義される、ということである。もちろん R が平面領域なら上記の定義式でよいが。これが等角擬計量になっていることは直接計算により簡単に確かめられる。また、この exp の中身 (の極限) は Robin 定数、そしてこの量 $r_R(z)$ は対数容量と呼ばれるものである。(古典的には、R がリーマン球面の部分領域で $z=\infty$ の場合にそう言われている。) この計量の性質については、別の節で触れることにしたい。

例 6 (Hahn 計量 h_R).

$$h_R(z)=\inf\left\{\frac{1}{|\varphi'(0)|};\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{D},R),\varphi(0)=z\right\}.$$

この計量は Minda [5] により詳しく調べられ、古典的な写像半径 (mapping radius)、被約モジュラス (reduced modulus) との関係や極値写像の特徴付けについても分かっている。これは定義から容易に分かるように正規化された $\mathcal{S}$-縮小的な計量である。さらに、R が $\mathbb{C}$ の真部分領域である場合には、分かりやすい函数

$$\delta_R(z)=\mathrm{dist}(z,\partial R)=\min_{\zeta\in\partial R}|z-\zeta|$$

との比較が容易に出来る。すなわち次が成り立つ。

補題 2.2.
$$\frac{1}{4\delta_R(z)} \le h_R(z) \le \frac{1}{\delta_R(z)}.$$

証明に Koebe の 1/4 定理と Schwarz の補題を用いるだけでよい。定義から直ちに分かるように $k_R \le h_R$ であるが、c_R についても同様の対応物が定義出来る。次にそれを述べておく。

例 7 (u_R).
$$u_R(z) = \sup\{|\varphi'(z)|; \varphi \in \mathcal{S}(R, \mathbb{D}), \varphi(z) = 0\}.$$

ただし、これだと容易に分かるように R の種数が正だと上のような φ は存在しないことになり、$u_R = 0$ となってしまう。そういう点であまり使い道はないかもしれないが、次の節で述べる結果においては一応極値的な役割を果たす。

リーマン面 R 上の可積分な正則 2 次微分のなす Banach 空間を $A_2(R)$ と表すことにする。つまり、$\varphi \in A_2(R)$ は局所的には $\varphi = \varphi(z)dz^2$ と表され、条件 $\iint_R |\varphi| = \iint_R |\varphi(z)|dxdy < \infty$ を満たすものである。

例 8 (q_R).
$$q_R(z) = \sup\{|\varphi(z)|^{1/2}; \varphi \in A_2(R), \iint_R |\varphi| \le \pi\}.$$

これもまた、名前のまだない (?) 等角擬計量である。また、定義から容易に分かるようにこれは正規化された $\mathcal{S}$-縮小的な計量になっている。少なくとも、$\omega \in \Omega(R)$ に対して $\omega^2 = \omega \otimes \omega \in A_2(R)$ であり、$\iint_R |\omega^2| = \pi\|\omega\|_R^2$ であるから $b_R \le q_R$ であることは容易に分かる。

3. これまでの計量の相互関係

この節では、前節で紹介した様々な計量について特徴的性質や大小比較などを行っていく。考えるべき問題としては次のようなものが挙げられるであろう。その中には未だに解決をみていない難しいものもあれば、まだ誰も考えていないかもしれないが比較的易しい問題もあるであろう。出席者の中からこのような問題に取り組んでくれる人が現れることを望むものである。σ, τ を正規化された等角不変計量の族とする。

1. 退化の問題。つまり、どのような条件の下で $\sigma_R \equiv 0$ となるか。またはある点において $\sigma_R = 0$ となるか。
2. 極値問題。計量を定義する時に用いた函数族に関して極値的なものの存在と一意性がどの程度言えるか。さらには、そのような極値函数の持つ幾何学的あるいは解析的性質を特徴づけることが出来るか。
3. 大小関係。例えば $\sigma_R \le \tau_R$ であるかどうかの判定。もしこれが正しいとして、ある点において等号が成立するための条件は？
4. 正則性 (regularity) および曲率。係数 (密度) はどの程度の滑らかさを持つか？さらには、曲率についてはどうか？
5. R が平面領域の場合の計量の境界挙動は？
6. 多変数に拡張するにはどうすればよいか。
7. 測地的か？

この講演では時間の関係で（というより筆者の力量からして）全ての計量について、これらを調べ上げるのは不可能であるので、いくつかの点についてのみ取り上げて述べていきたい。

退化の問題については次のように整理できる。

1. $k_R \equiv 0 \Leftrightarrow$ R は $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ または複素 1 次元トーラスと等角同値。
2. $c_R \equiv 0 \Leftrightarrow$ $R \in O_{AB}$.
3. $b_R \equiv 0 \Leftrightarrow$ $R \in O_G$. (?)
4. $s_R \equiv 0 \Leftrightarrow$ $R \in O_{AD}$.
5. $r_R \equiv 0 \Leftrightarrow$ $R \in O_G$.
6. $h_R \equiv 0 \Leftrightarrow$ R は $\widehat{\mathbb{C}}$ または $\mathbb{C}$ と等角同値。
7. $u_R \equiv 0 \Leftrightarrow$ R は種数が正であるかまたは種数が 0 でも連続体を境界に持ついかなる平面領域とも等角同値ではない。
8. $q_R \equiv 0 \Leftrightarrow$ R は $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*, \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ のいずれかに等角同値。

次に大小関係について述べてみよう。まず次がもっとも基本的であろう。証明は Schwarz の補題から直ちに従う。

定理 3.1. **常に $c_R \le k_R$ が成立する。さらにある点で等号が成立すれば R は単連結でなければならない（従ってあらゆる点で等号が成立する）。**

実はこの c_R と k_R が正規化された縮小的な等角擬計量の族において極値的な役割を果たす。

定理 3.2 (cf. [4]). **$\sigma = (\sigma_R)_R$ を正規化された縮小的な等角擬計量の族とする。このとき常に $c_R \le \sigma_R \le k_R$ が成立する。**

証明. $\pi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, R)$ を普遍被覆写像とすれば仮定から $\pi^*(\sigma_R) \le \sigma_{\mathbb{D}} = k_{\mathbb{D}} = \pi^*(k_R)$ である。従って $\sigma_R \le k_R$ が従う。次に $\varphi \in \mathcal{O}(R, \mathbb{D})$ を $\varphi(z) = 0$ なるものとする。これに対して $\varphi^*(\sigma_{\mathbb{D}}) \le \sigma_R$ なのだから、$\sigma_R(z) \ge \sigma_{\mathbb{D}}(0)|\varphi'(z)| = |\varphi'(z)|$ が成り立つ。ここでこのような φ についての上限を取れば $\sigma_R(z) \ge c_R(z)$ を得る。 □

もちろん、この結果は k_R, c_R それ自身が縮小的であることから、best possible である。同様にして次の結果を得る。

定理 3.3. **$\sigma = (\sigma_R)_R$ を正規化された $\mathcal{S}$-縮小的な等角擬計量の族とする。このとき常に $u_R \le \sigma_R \le h_R$ が成立する。**

さて、前節の定義で計量 r_R だけがある種の極値問題に関係する形で書かれていなかった。そこで、実はこれについてもやはりある意味でそのような形で記述できることを述べておこう。まず $u(z) = G_R(z, z_0)$ とすると、これは $R \setminus \{z_0\}$ において調和であるから、微分

$$\omega = 2\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

を考えるとこれはこの上で正則微分になる。そこで次の函数を考える。

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} \omega + G_R(z_1, z_0),$$

ここで z_1 は z_0 と異なる R 内の任意の固定した一点としておく。するとこの函数は z_1 から z への path の取り方によって値が変わってくる。特に z_0 の回りを何周するかで値は $2\pi i$ の整数倍だけ変わってくる。従って $G = e^{-F}$ という函数を考えると、こ

れは少なくともその分の不定性はなくなって R 上の多価正則関数になる。しかも、$|f(z)| = e^{-G(z,z_0)}$ であるから、少なくともその絶対値は一価に定まりしかも 1 よりも小さい。また、f は $z = z_0$ において一位の零点を持つ。定義式から分かるように実は

$$r_R(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$$

となっている。従って、次のような函数族を考えるのが自然に思えてくるだろう。$B_{z_0}(R)$ を R 上多価正則函数 φ で $|\varphi|$ は一価に定まり $|\varphi| < 1$ かつ $\varphi(z_0) = 0$ を満たすようなもの全体とする。このような族は [1] においても重要性がほのめかされている。$\varphi \in B_{z_0}(R)$ については（局所座標を決めれば）$|\varphi'(z_0)|$ もまた多価性によらず定まることに注意しておく。すると、つぎのような特徴付けを得る。

命題 3.4.

$$\boldsymbol{r_R(z_0) = \sup\{|\varphi'(z_0)|; \varphi \in B_{z_0}(R)\}.}$$

もちろん、$B_{z_0}(R)$ のうちで一価正則なものからなる部分集合について上の形の上限を取ったものが $c_R(z_0)$ に他ならなかったわけだから、特に $c_R \leq r_R$ を得る。上の命題は本質的には優調和函数の最小値原理から従う。同様に、この特徴付けから r が $\mathcal{S}$-縮小的であることも分かる。

さて、k_R と b_R に関しては実は一般に大小関係が成立しないことが知られている。これについては [7] 及び [8] を参照のこと。一方、$r_R \leq b_R$ ではないか、というのが有名な吹田予想 [6] であるがこれは連結度が 2 以下の領域の場合を除いて解決していない。一方、$s_R \leq c_R$ であるという結果は Ahlfors-Beurling [1] により解かれたことになっている。あるいは [2] を参照のこと。

以上により、次のような大小関係を得た。

$$u_R \leq s_R \leq c_R \leq \left\{ \begin{array}{c} k_R \\ b_R \leq q_R \\ r_R \end{array} \right\} \leq h_R.$$

References

[1] L. V. Ahlfors and A. Beurling. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. *Acta Math.*, Vol. 83, pp. 101–129, 1950.

[2] J. Burbea. The Schwarzian derivative and the Poincaré metric. *Pacific J. Math.*, Vol. 85, pp. 345–354, 1979.

[3] S. D. Fisher. *Function Theory on Planar Domains*. John-Wiley, New York, 1983.

[4] M. Jarnicki and P. Pflug. *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1993.

[5] D. Minda. The Hahn metric on Riemann surfaces. *Kodai Math. J.*, Vol. 6, pp. 57–69, 1983.

[6] N. Suita. Capacities and kernels on Riemann surfaces. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 46, pp. 212–217, 1972.

[7] N. Suita. Conformal metrics. *RIMS Kōkyūroku*, Vol. 323, pp. 139–153, 1978. (in Japanese).

[8] S. Yamashita and T. Sugawa. Bergman kernel, analytic capacity, and Poincaré dinsity. Preprint, 1999.