一様完全集合の Hausdorff 次元

須川 敏幸　　京都大学・理学部

概 要

Hausdorff 次元の下からの評価は一般的に難しいとされるが、この小文では“ 一様完全性 ”という、より評価の容易な量によって Hausdorff 次元を下から評価する方法を紹介する。

1 一様完全性

この節では最初に一様完全集合の定義を与える。この概念は元々は Pommerenke [4] によって提唱されたものだがその条件の簡明さ・自然さから他の研究者によっても独立に、陰に陽に研究されてきたようである。同値な定義は色々考えられるがここでは次のような定義を採用しよう。

(X, d) を距離空間とする。各点 a と定数 $r_0 < r_1$ に対して集合 $A(a, r_0, r_1)$ を

$$\{x \in X; r_0 < d(x, a) < r_1\}$$

によって定めこのような開集合を（a を中心とする）円環と呼ぶ。

$M > 0$ を定数として、2 点以上からなる X の閉部分集合 C が M-一様完全であるとは任意の $a \in X$ と $c > 0$ に対して円環 $A(a, c, e^M c)$ が決して C を分離しないことを言う。ここに円環 $A = A(a, r_0, r_1)$ が C を分離するとは $A \cap C = \emptyset$ であり、ある点 $x_0, x_1 \in C$ が存在して $d(x_0, a) \leq r_0$ かつ $d(x_1, a) \geq r_1$ を満たすことを言う。

特に $X = \mathbb{C}$ または $\widehat{\mathbb{C}}$ の場合には一様完全性に関して様々な同値な定義が知られている。詳しくは [4], [5], [8] などを参照されたい。また高次元のユークリッド空間または n-次元球面の閉集合の一様完全性については [2] に詳しい。

ここでは $X = \widehat{\mathbb{C}}$ の場合の一様完全性の特徴付けで特に重要なものを挙げておこう。

C をリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の閉集合で 3 点以上含むものとする。$D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus C$ とすると良く知られているようにこれには定曲率 -4 の完備リーマン計量 $\rho_D(z)|dz|$ が入る。これは通常 D の双曲計量または Poincaré 計量と呼ばれる。区分的に滑らかな D 内の曲線 γ に対してその ρ_D に関する長さを $\ell_D(\gamma)$ と書くことにしよう。そこで D 内で可縮でない閉曲線 γ についての双曲的長さ $\ell_D(\gamma)$ の下限を $L(D)$ と書くことにする。

一方、上の M-一様完全性は等角不変ではないので次のような量を定義しよう。D 内の 2 重連結領域で C を分離するようなものの modulus の上限を Mod(D) と書く。ここに 2 重連結領域の modulus とはそれが円環 $\{r_0 < |z| < r_1\}$ に等角同値であるとき$\log r_1/r_0$によって定められる量である。定義から明らかなように C が $\mathbb{C}$ 内の閉集合である場合にはユークリッド計量に関して C は任意の $M > Mod(D)$ に対して M-一様完全である。逆に C が M-一様完全ならば $Mod(D) \leq 2M + 3.4665$ が成り立つ ([8])。

これらについて次のことが成り立つ。

定理 1 ([8])

$$L(D) \leq \frac{\pi^2}{Mod(D)} \leq \min\{L(D)e^{L(D)}, \frac{L(D)^2}{2}\coth^2(L(D)/2)\}.$$

特に C が一様完全であるための必要十分条件は $L(D) > 0$ が成り立つことである。

これにより C の一様完全性の評価は D の双曲幾何学によって完全に特徴づけられる。この応用として Julia 集合や Klein 群の極限集合の一様完全性に関する結果が得られる。例えば [6] や [7] を参照して頂きたい。

以下では特に断らない限りは考える空間はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ として距離はユークリッド距離とする。応用上は他に n 次元球面 S^n も重要であるがほとんど $\mathbb{R}^n$ の場合と同様であるので適当な修正を加えれば $\mathbb{R}^n$ に関する結果から必要な結論は従うであろう。

2 ハウスドルフ測度及びハウスドルフ容量

この節ではハウスドルフ測度とハウスドルフ容量 (Hausdorff content) に関する定義と基本的性質について述べておく。ハウスドルフ次元やハウスドルフ測度に関してはこの資料の他の項目に詳しく述べられているので詳細についてはそちらをご覧頂きたい。ここでは簡単のために $\mathbb{R}^n$ の集合に限定して話を進める。

E を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし、αを正数とする。正数εに対して $\mathbb{R}^n$ の集合族 $(A_j)_{j=1,2,\cdots}$ が E のε -被覆であるとは $E \subset \bigcup_j A_j$かつ$\mathrm{diam} A_j < \varepsilon$を満たすことであるとする。このとき、$\sum_j (\mathrm{diam} A_j)^\alpha$の$\varepsilon$-被覆に関する下限を $\mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(E)$ で表す。これはεについて単調増加であるから極限$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(E)$ が存在するがそれを $\mathcal{H}^\alpha(E)$ と書き、E のα-次元ハウスドルフ測度と呼ぶ。容易に分かるように $\mathcal{H}^\alpha(E)$ はαに関して単調減少であり、あるα_0において有限な正値を取れば$\alpha < \alpha_0$に対して $\mathcal{H}^\alpha(E) = \infty$ であり、また$\alpha > \alpha_0$に対して $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$である。また$\alpha > n$ならば常に $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$ である。従ってある $0 \leq \alpha_0 \leq n$ が存在して$\alpha < \alpha_0$ならば $\mathcal{H}^\alpha(E) = \infty$ が成り立ち$\alpha > \alpha_0$ならば $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$ が成り立つ。このα_0を E のハウスドルフ次元と呼び

H-dim(E) で表すことにする。（注意：一般には $\mathcal{H}^{\alpha_0}(E)$ は有限な正値であるとは限らない。）

次に $(A_j)_{j=1,2,\dots}$ を半径 r_j の円板による E の被覆に関する $\sum_j r_j^\alpha$ の下限を E の α-次元ハウスドルフ容量と呼び $\Lambda^\alpha(E)$ と表す。$\mathbb{R}^n$ の直径 d の集合は半径 $\sqrt{3}d/2$ のある閉円板に含まれることから容易に分かるように

$$\Lambda^\alpha(E) \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E)$$

が成り立つ。従って特に $\Lambda^\alpha(E) > 0$ ならば H-dim$(E) \ge \alpha$ が成り立つ。逆に $\Lambda^\alpha(E) = 0$ ならば $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$ だから H-dim$(E) \le \alpha$ である。ハウスドルフ容量についてはあまり文献に出ていないようであるが、例えば [3] を参照して頂きたい。定義では円板の半径を用いたが、一般の集合による被覆を取ってその直径を考えても大した違いはないのでどちらの定義でもいいように思われるがここでは一応このような定義にしておく。

3　ハウスドルフ次元の下からの評価

この節ではハウスドルフ容量を用いて一様完全性が特徴づけられることについて述べる。その系としてハウスドルフ次元の下からの評価が得られる。この結果は最初に Järvi-Vuorinen [2] により与えられたが彼らの証明ではそれほど具体的な量的評価が与えられているわけでもなく、またその評価も空間の次元 n に依存するものであったが、ここでは次元によらないより具体的評価を与える。

定理 2 ([2], [8]) **E を $\mathbb{R}^n$ の閉集合とする。E が M-一様完全ならば任意の $a \in E$ 及び $0 < r < \mathrm{diam} E$ に関して**

$$\Lambda^{\alpha_0}(E \cap B(a,r)) \ge \frac{1}{2 \cdot 3^n}\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha_0}$$

が成り立つ。ただし、ここに

$$\alpha_0 = \frac{\log 2}{\log(2e^M + 1)}$$

として $B(a,r)$ は a を中心とする半径 r の閉球とする。

逆にある定数 $\alpha > 0$ 及び $A > 0$ が存在して

$$\Lambda^\alpha(E \cap B(a,r)) \ge A r^\alpha$$

が任意の $a \in E$ 及び $0 < r < \frac{1}{2}\mathrm{diam} E$ に対して成り立つとすると E は $\frac{1}{\alpha}\log\frac{1}{A} + \log 12$-一様完全である。

この定理から直ちに次の結果を得る。

系 3 E **を** $\mathbb{R}^n$ **の閉集合で** M-**一様完全とすると**

$$\text{H-dim}E \geq \frac{\log 2}{\log(2e^M+1)}\left(\geq \frac{\log 2}{M+\log 3}\right)$$

が成り立つ。

注意　E が $\mathbb{R}^m$ 内の M-一様完全集合とすると $m<n$ に対して $E\subset\mathbb{R}^n$ とみなした時やはり E は $\mathbb{R}^n$ の M-一様完全集合となり逆の評価も成り立つ。このことから、一様完全性だけからはハウスドルフ次元の下からの評価は高々1 次元未満しか期待できないことが分かる。

では以下でこの定理の証明を行おう。閉球 $B=B(a,r)$ に対して $\mathrm{rad}B=r, \mathrm{cent}B=a$ と書くことにする。

補題 4 E **を** $\mathbb{R}^n$ **内の** M-**一様完全な閉集合 とする。閉球** B **が** $\mathrm{cent}B\in E$ **かつ** $E\setminus B\neq\emptyset$ **を満たしているとき互いに交わらない閉球** B_1,B_2 **で**

(1) $B_j\subset B$,
(2) $\mathrm{rad}B_j=c\cdot\mathrm{rad}B$,
(3) $\mathrm{cent}B_j\in E$

を各 $j=1,2$ **に対して満たすものが存在する。ただし、ここに** $c=\frac{1}{2e^M+1}\in(0,\frac{1}{3})$ **とする。**

Proof.　相似変換に関して不変な言明なので最初から $B=B(0,1)$ としてよい。まず $B_1=B(0,c)$ としておく。すると (1),(2),(3) は $j=1$ に対して満たされている。次に仮定から円環 $R=\{x\in\mathbb{R}^n; 2c<|x|<2e^Mc\}$ は E を分離しないから $R\cap E\neq\emptyset$ である。そこで $a\in R\cap E$ を取って $B_2=B(a,c)$ とおくと取り方から $B_1\cap B_2=\emptyset$ であり $j=2$ についても上の条件が満たされる。 ■

[定理 2 の証明]　$a\in E$ と定数 $0<r<\frac{1}{2}\mathrm{diam}E$ を固定しておき $B=B(a,r)$ とおく。これは上の補題の仮定を満たすので互いに交わらない閉球 B_1,B_2 で $B_j\subset B, \mathrm{rad}B_j=cr$ かつ $\mathrm{cent}B_j\in E$ を満たすものが取れる。同じ操作を各 B_j に対して繰り返し、得られた閉球のそれぞれに同じ操作を繰り返す$\cdots$ということを続けると $I=\{1,2\}$ として次のような閉球の族 $(B_{i_1,\cdots,i_k})_{(i_1,\cdots,i_k)\in I^k}$,　$k=0,1,2,\cdots$ で任意の $k=1,2,\cdots$ と $(i_1,\cdots,i_k)\in I^k$ に対して次の条件を満たすものが得られる。

1. $B_{i_1,\cdots,i_k}\subset B_{i_1,\cdots,i_{k-1}},\ \mathrm{rad}B_{i_1,\cdots,i_k}=rc^k,\ \mathrm{cent}B_{i_1,\cdots,i_k}\in E,$
2. $B_{i_1,\cdots,i_{k-1},1}\cap B_{i_1,\cdots,i_{k-1},2}=\emptyset.$

ただし、$B_\emptyset=B$ と約束しておく。

そこで $K=\cap_{k=1}^\infty\cup_{i_1,\cdots,i_k\in I}B_{i_1,\cdots,i_k}$ とおくと構成の仕方から $K\subset E$ である。すると、次の一般的な結果を適用できる。

命題 5 p **を** 2 **以上の自然数とし、** $I = \{1, \cdots, p\}$ **とする。** $(B_{i_1,\cdots,i_k})_{(i_1,\cdots,i_k)\in I^k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ **を** $\mathbb{R}^n$ **内の閉球の族で正定数** c, r **が存在して各** $k = 0, 1, 2, \cdots$ **及び** $(i_1, \cdots, i_k) \in I^k$ **に対して次の条件を満たすものとする。**

1. $B_{i_1,\cdots,i_k} \subset B_{i_1,\cdots,i_{k-1}},\ \mathrm{rad}B_{i_1,\cdots,i_k} = rc^k,\ \mathrm{cent}B_{i_1,\cdots,i_k} \in E,$
2. $B_{i_1,\cdots,i_{k-1},l} \cap B_{i_1,\cdots,i_{k-1},m} = \emptyset\ (l \neq m).$

このとき $\alpha = -\frac{\log p}{\log c}$ **とおけば** Cantor **集合** $K = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{i_1,\cdots,i_k\in I} B_{i_1,\cdots,i_k}$ **は正値有限な** α **次元ハウスドルフ測度を持ち**

$$\frac{1}{3^n p}\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha} \le \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha} \Lambda^{\alpha}(K) \le \mathcal{H}^{\alpha}(K) \le (2r)^{\alpha},$$

を満たす。特に $\text{H-dim}K = -\frac{\log p}{\log c}$ **である。**

注意　より一般的な結果については Hata [1] を参照のこと。

[命題 5 の証明]　まず $\mathcal{H}^{\alpha}(K)$ の上からの評価はほとんど明らかであろう。実際、任意の $\varepsilon > 0$ に対して k を十分大きく取って $rc^k < \varepsilon$ となるようにすれば $(B_{i_1,\cdots,i_k})_{(i_1,\cdots,i_k)\in I^k}$ は K の ε-被覆である。よって

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(K) \le \sum_{(i_1,\cdots,i_k)\in I^k} (\mathrm{diam}B_{i_1,\cdots,i_k})^{\alpha} = p^k(2rc^k)^{\alpha} = (2r)^{\alpha}.$$

が成り立つ。あとは $\varepsilon \to 0$ とすれば $\mathcal{H}^{\alpha}(K) \le (2r)^{\alpha}$ を得る。次に $\Lambda^{\alpha}(K)$ の下からの評価を行う。そのためにまず K に support を持つ Borel 確率測度 μ で $\mu(B_{i_1,\cdots,i_k}) = p^{-k}$ を満たすものを構成しよう。各 $(i_k)_{k\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ に対して $\cap_{k=1}^{\infty} B_{i_1,\cdots,i_k}$ はただ 1 点のみからなるがその点を $f((i_k))$ と表すことにすると写像 $f : I^{\mathbb{N}} \to K$ は $I, I^{\mathbb{N}}$ に離散位相及びその直積位相を導入した時に同相写像となる。さて $I^{\mathbb{N}}$ には標準的な Bernoulli 測度 ν が存在することはよく知られている。つまり、任意のシリンダー集合 $[i_1, \cdots, i_k] = \{(j_l)_{l\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}; j_1 = i_1, \cdots, j_k = i_k\}$ に対して $\nu([i_1, \cdots, i_k]) = p^{-k}$ を満たすような $I^{\mathbb{N}}$ 上の Borel 確率測度 ν が存在する。そこで、この ν の $f : I^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ による像測度を μ とすればよい。（つまり、$\mu(E) = \nu(f^{-1}(E))$ とする。）さて、この μ に対して実は次のような評価が成り立つことを示そう。つまり任意の閉球 $C = B(x, \rho)$ に対して $\mu(C) \le 3^n p(\rho/r)^{\alpha}$ が成り立つ。実際、$\rho \ge r$ の時はこの式は自明なので $\rho < r$ と仮定してよい。このとき整数 $k \ge 0$ を $rc^{k+1} < \rho \le rc^k$ が成り立つように取れる。すると $J = \{(i_1, \cdots, i_k) \in I^k; B_{i_1,\cdots,i_k} \cap C \neq \emptyset\}$ の各元 $(i_1, \cdots, i_k)$ に対して $B_{i_1,\cdots,i_k} \subset B(x, \rho + 2rc^k)$ が成り立つのでこれより $\cup_{(i_1,\cdots,i_k)\in J} B_{i_1,\cdots,i_k} \subset B(x, \rho + 2rc^k)$ を得る。体積を比較することにより

$$\#J \cdot (rc^k)^n \omega_n \le (\rho + 2rc^k)^n \omega_n,$$

を得る。ここに ω_n は $\mathbb{R}^n$ の単位球の体積を表す。これより $\#J \le (\frac{\rho}{rc^k} + 2)^n \le 3^n$ を得る。よって

$$\mu(C) \le \mu\Big(\bigcup_{(i_1,\cdots,i_k)\in J} B_{i_1,\cdots,i_k}\Big) = \#J \cdot \frac{1}{p^k} \le 3^n p^{-k} = 3^n p(c^{k+1})^{\alpha} < 3^n p\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha}$$

が従う。この評価が出ればあとは Frostman の補題から結果が従う。実際、(C_j) を K の任意の可算被覆で各 C_jは半径ρ_jの閉球であるとする。すると

$$1 = \mu(K) \leq \sum_j \mu(C_j) \leq 3^n p \sum_j \left(\frac{\rho_j}{r}\right)^\alpha,$$

より $r^\alpha/3^n p \leq \sum_j \rho_j^\alpha$が得られる。$(C_j)$ は任意だったからこれより $r^\alpha/3^n p \leq \Lambda^\alpha(K)$ が従う。 ■

[定理2の証明の続き]　では定理2の証明に戻る。先の命題により$\Lambda^\alpha(K) \geq r^\alpha/2{\cdot}3^n$ であることが分かるから、$K \subset E \cap B(a,r)$ より$\Lambda^\alpha(E \cap B(a,r)) \geq r^\alpha/2 \cdot 3^n$が示される。よってまず定理の前半が示された。

　次に定理の後半の主張を示す。まず最初に $a \in E$ かつ $0 < r < \frac{1}{2}\mathrm{diam}E$ とすると仮定より$\Lambda^\alpha(E \cap B(a,r)) \geq Ar^\alpha$である。ここで $\{B(a,r)\}$ が $B(a,r)$ の被覆であることに注意すると$\Lambda^\alpha(B(a,r)) \leq (2r)^\alpha$であることが分かるから、任意の $0 < c < \frac{1}{2}A^{1/\alpha}$ に対して

$$\Lambda^\alpha(B(a,cr)) \leq (2cr)^\alpha < Ar^\alpha \leq \Lambda^\alpha(E \cap B(a,r))$$

と計算出来る。このことから特に $E \cap B(a,r) \setminus B(a,cr) \neq \emptyset$であることが分かる。（またさらに $c < 1$ でなければならないから、$\frac{1}{2}A^{1/\alpha} \leq 1$ であることも分かる。）

　次に$\frac{1}{2}\mathrm{diam}E \leq r < \mathrm{diam}E$ なる r に対しては

$$E \cap B(a,r) \setminus B(a,cr/2) \supset E \cap B(a,r/2) \setminus B(a,cr/2) \neq \emptyset.$$

であるから結局任意の $0 < c < \frac{1}{4}A^{1/\alpha}$と $0 < r$ に対して円環 $A(a,cr,r)$ は E を分離しないことが分かる。

　最後に x を任意の $\mathbb{R}^n$ の点とする。$c = \frac{1}{4}A^{1/\alpha}(\leq 1/2)$ に対して円環 $A(x,cr/3,r)$ がもし Eを分離したとすると、ある点$a \in E$で $|x-a| \leq cr/3$ を満たすものがある。そこで新たに円環 $A(a, 2cr/3, (1-c/3)r)$ を考えるとこれは先の円環 $A(x,cr/3,r)$ に含まれるのでやはり E を分離することになる。ところが $2c/3(1-c/3) < c$で あるからこれは先の考察に反することになる。よって $A(x,cr/3,r)$ は E を分離しない。このことから E は$\log 3/c = \frac{1}{\alpha}\log\frac{1}{A} + \log 12$-一様完全であることが分かる。
■

参考文献

[1] Hata, M. On the Hausdorff dimension of spherical limit sets, *J. Math. Kyoto Univ.*, **26** (1986), 605–612.

[2] Järvi, P. and Vuorinen, M. Uniformly perfect sets and quasiregular mappings, *J. London Math. Soc.*, **54** (1996), 515–529.

[3] O'Farrell, A. Continuity properties of Hausdorff content, *J. London Math. Soc. (2)*, **13** (1976), 403–410.

[4] Pommerenke, C. Uniformly perfect sets and the Poincaré metric, *Ark. Math.*, **32** (1979), 192–199.

[5] Pommerenke, C. On uniformly perfect sets and Fuchsian groups, *Analysis*, **4** (1984), 299–321.

[6] Sugawa, T. An explicit bound for uniform perfectness of the Julia sets of rational maps, Preprint (1997).

[7] Sugawa, T. Uniform perfectness of the limit sets of Kleinian groups, Preprint (1997).

[8] Sugawa, T. Various domain constants related to uniform perfectness, Preprint (1997).