一様完全集合 — その解析的・幾何的側面 —

須川 敏幸　京都大学大学院・理学研究科

1. 一様完全性の定義とその背景

古典的な解析学は滑らかなものをその主な研究対象としてきた．しかし，比較的単純な構造を持ちながらも滑らかとは限らないものが自然な数学的対象となり得ることが近年認識されるようになってきた．特に，ある種の自己相似性を持つ集合については，その組み合わせ的な構造を駆使して深い解析が可能であることが分かってきた．この方法論は非常に強力ではあるが，構造が変われば手法も替えなければいけないため，統一的な扱いが一般には難しい．従って，扱いが比較的簡単で，その図形の持つ性質をうまく反映し，有益な情報が得られるような，一般のコンパクト集合についても適用可能な数学的量が定義できれば，この分野の進展にとって重要な役割を果たすであろう．例えば Hausdorff 次元などはその例である．

連結で 2 点以上からなるコンパクト集合は連続体と呼ばれるが，例えば次元の低い空間に射影することなどにより，それに対して有益な情報が得られることが多い．一方，孤立点は構造が別の意味で単純なので一般には難しい対象ではない．位相空間論において，孤立点を持たないような閉集合は完全 (perfect) であると呼ばれている．Euclid 空間内の，連続体を含まない（つまり全不連結な）完全集合は（一般）Cantor 集合と呼ばれるが，このようなものの解析が，ある意味で最も難しいともいえる．

この論説では完全性を定量化した一様完全性という概念について説明し，定義の見かけの単純さにもかかわらず，この性質から全不連結な対象についてさえも多くの有益な情報が得られることを概観したい．実際に 5 節で見るように，ある種の自己相似性を持つようなコンパクト集合の多くがこの性質を享受している．以下ではより深い結果を導くために，複素平面またはリーマン球面（2 次元球面）内のコンパクト集合に限ることにし，それ以外の場合については 6.1 節で現況を述べるにとどめたい．なお，自明な場合を排除するために，何も断らなければ，以下では 2 点以上からなるコンパクト集合のみを考えることにする．

1.1. **定義.** リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 内のコンパクト集合 E が**一様完全** (uniformly perfect) であるとは，ある定数 $c > 0$ が存在して次の性質が成立することをいう：任意の有限点 $a \in E$ と任意の $0 < r < d(E)$ に対して，E の中に $cr \le |b - a| \le r$ を満たす点 b が取れる．ただし，ここに $d(E)$ は集合 E の Euclid 直径とし，$\infty \in E$ の場合は $d(E) = +\infty$ と約束する．このとき，a に近づく $E \setminus \{a\}$ 内の点列が取れることから E が完全であることが分かる．上の定義は，集合 E を a の周りでどんな倍率の顕微鏡で観察してもある決まった半径の区域に必ず E の他の点が見つかることを意味している．その意味で，‘一様’ という名が冠されているのである．定義から容易に分かるように，この概念は平面の相似変換に関して不変な性質である．しかし実際には，(定数 c の変化を許せば）Möbius 変換を含むリーマン球面のより一般の変換についても不変な性質であることが分かる（2.1 節参照）．このことを考え合わせると，上の定義で球面距離ではなく Euclid 距離を用いていること，あるいは，無限遠点が見かけ上特別な役割を果たしていることは少し奇異に感じられるかもしれないが，以下に述べる（無限遠点を特別な点とはしないような）一様完全性のより自然な定式化によって，この概念の普遍性が理解されるであろう．

1.2. **小史.** 定義を見ると何でもない性質のように思えるが，筆者の知る限り，一様完全性がこのような形で文献に現れたのは Pommerenke [61] が最初である．同値な条件が実際には Beardon-Pommerenke [8] に既に現れているが．なお，ほぼ同じ時期に Tukia-Väisälä [81] によって等価な概念が ‘等質的稠密’(homogeneously dense) という名の下に別の文脈から与えられている．それまでこのような概念が系統的に研究されたことがなかった，というのはむしろ驚くべきことかもしれない．いずれにせよ，この概念の有用性が認識され始めると，多くの研究者がこの性質をより深く探求また応用するようになり，この 20 年ほどの間に他の色々な分野との結びつきが明らかにされてきた．特に近年のフラクタル幾何学に対する関心の高まりは，滑らかとは限らない数学的対象をい

かに測るべきか，その尺度となる道具に対する需要を生み出した．一様完全性はそのような尺度の一つとして有効な手段を提供し得るであろう．

1.3. **個人的背景．** ここで筆者が一様完全性を最近の研究対象の一つとして選んだ背景について簡単に記しておきたい．もともと筆者は Teichmüller 空間の Bers 埋め込みを研究するために，Schwarz 微分とは何かを自分なりに理解しようとしていた．そのときある目的から，与えられた領域の解析的普遍被覆の Schwarz 微分の双曲ノルムが有限になるための条件を模索していて，一様完全性の概念に到達した．1994 年頃のことである．独力でいくつか同値な概念を見いだしていたが，その後 Pommerenke による一連の仕事を見て，ほとんど全て既知であったことを悟った．ただ，若干の新しい知見も得られていたので，それらも含めてまとめたものが筆者による [69] である．

なお，この論説を書くにあたり筆者が滞在していた Helsinki 大学，特に有益な助言を下さった Matti Vuorinen 氏には，大変お世話になった．この場を借りてお礼申し上げる．

2. 幾何的特徴付け – 裏側から見た一様完全性

コンパクト集合 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ の補集合を Ω で表すことにする．この節では E の一様完全性を開集合 Ω の持つ幾何的性質により特徴づけることを考える．従ってこの節では Ω を主に考えることとする．なお，Ω の境界 $\partial\Omega$ はつねにリーマン球面内で考える．$\mathbb{C}$ における Ω の相対境界 $\partial\Omega \setminus \{\infty\}$ は，それとは区別するために以下では $\partial_{\mathrm{b}}\Omega$ により表記することにする．

2.1. **円環の modulus による特徴付け．** この論説では 2 重連結領域を**円環**と呼び，$r_1 < |z-a| < r_2$ の形の円環を特に**同心円環**と呼ぶことにする．任意の円環 A は実際にこのような形の同心円環と解析的同値であることが知られているが，量 $\log(r_2/r_1)$ は A のみによって定まる等角 (解析的) 不変量である．これを A の **modulus** と呼び，記号で $\mathrm{mod}\, A$ と表す．Ω 内の円環 A が境界 $\partial\Omega$ を**分離する**とは，$\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ の二つの連結成分がそれぞれ $\partial\Omega$ と交わることをいう．A が $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ を分離するといっても同じことである．このとき次のことが分かる．

定理 2.1 ([62], [69])．***$E = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の一様完全性は次の各条件と同値である．***
 (i) $\partial\Omega$ を分離する Ω 内の円環の modulus が有界．
 (ii) $\partial\Omega$ を分離する Ω 内の同心円環の modulus が有界．

定義から，一様完全性と条件 (ii) との同値性は見やすいであろう．$\partial\Omega$ を分離するような円環または同心円環 A 全体に対する $\mathrm{mod}\, A$ の上限をそれぞれ $M(\Omega)$, $M^\circ(\Omega)$ と表すことにする．もしそのような A が存在しない場合は上限を便宜上 0 であるとしておく.（同様に，空集合の下限は断らない限り以下では $+\infty$ と定める.）すると Teichmüller の極値領域に関する議論およびその modulus の評価を用いて，不等式 $M^\circ(\Omega) \le M(\Omega) \le 2M^\circ(\Omega) + C$ が得られる ([31], [69])．ただしここに C は絶対定数である．従って (i) と (ii) の同値性が得られる．

もし Ω が連結，すなわち領域であるならば，$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ の各成分は単連結となるので，上の特徴付けによって $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の一様完全性と $\partial\Omega$ の一様完全性は同値であることが分かる．また，K-擬等角写像 f に対して $K^{-1}\mathrm{mod}\, A \le \mathrm{mod}\, f(A) \le K\, \mathrm{mod}\, A$ が成り立つことはよく知られており（[1] 参照），従って特徴付け (i) から一様完全性が擬等角写像によって不変であることが分かる．

最初に与えた一様完全性の定義や条件 (ii) は無限遠点を特別な点としているが，条件 (i) では無限遠点はもはや特別な役割を果たしていないことに注意しておく．

2.2. **双曲計量と Fuchs 群．** この小節では E は少なくとも 3 点以上含むと仮定する．すると，Poincaré-Koebe の一意化定理により，Ω の各連結成分 Ω_0 の普遍被覆面は単位円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ と解析的同値になるので，解析的普遍被覆 $p = p_{\Omega_0} : \mathbb{D} \to \Omega_0$ の存在が分かる．$\Gamma = \Gamma_{\Omega_0}$ をこの被覆変換群とすると，これは $\mathbb{D}$ に固定点なしに作用する Fuchs 群となり，単位円板上の双曲計量（Poincaré 計量）$\rho_{\mathbb{D}} = |dz|/(1-|z|^2)$ は Γ の元による引き戻しに関して不変なので，関係式 $\rho_{\mathbb{D}} = p^*\rho_{\Omega_0}$ によって Ω_0 に完備な Riemann 計量 ρ_{Ω_0} が定義され，実際これは普遍被覆 p の取り方に無関係であることが分かる．各成分ごとにこのように計量を入れれば，Ω 全体に計量 ρ_Ω が定義されるが，これを Ω の双曲計量と呼ぶ．この意味で境界が 3 点以上からなる開集合は双曲的と呼ばれる.（注意：ここでの計量は Gauss 曲率が -4 である．曲率が -1 となる計量の定義 $2\rho_\Omega$ を好む著者も多いので他の論文を参照する時などは注意が必要である.）Ω 内の区分的に滑らかな曲線 γ の双曲的長さは $\ell_\Omega(\gamma) = \int_\gamma \rho_\Omega(z)|dz|$ によって定義される．Ω 内の閉曲線が**非自明**であるとは，Ω において，ある 1 点に homotopic でないことをいう．Ω 内の非自明な閉曲線 γ の双曲的長さの下限 $\inf_\gamma \ell_\Omega(\gamma)$ を以下では $L(\Omega)$ により表すことにする．これは Ω が puncture を持つ場合は 0 となり，持たない場合は Ω 内の（単純）閉測地線の双曲的長さの下限と一致する．また Ω 内の 2 点 z, w の間の双曲距離

$d_\Omega(z,w)$ は 2 点を結ぶ Ω 内の曲線の双曲的長さの下限として定義される．ただし z,w が異なる連結成分に属する場合は距離を無限大として定義する．$z_0\in\Omega$ を中心とするいわゆる距離球 (metric ball) $D_\Omega(z_0,r)=\{z\in\Omega; d_\Omega(z_0,z)<r\}$ を考える．この距離球が実際に円板と位相同型であるような r の上限を Ω の z_0 における単射半径と呼び $\iota_\Omega(z_0)$ で表す．さらに $z_0\in\Omega$ にわたるこの下限を Ω の単射半径と呼び，ここでは $I(\Omega)$ により表す．すると，簡単な考察から $L(\Omega)=2I(\Omega)$ であることが分かる．なお，この小節の用語は一般の双曲的リーマン面，つまり単位円板を解析的普遍被覆面に持つようなリーマン面に対してもそのまま適用できることに注意しておく．

2.3. **双曲幾何による特徴付け．** 前小節の用語を用いて一様完全性は次のようにも特徴付けられる．

定理 2.2 ([61], [69])**．Ω を双曲的開集合とすると $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ の一様完全性は次の各条件と同値である．**
(i) Ω 内の非自明な閉曲線の双曲的長さの下限 $L(\Omega)$ は正．
(ii) Ω の単射半径 $I(\Omega)$ は正．
(iii) $\inf\{\mathrm{tr}^2 g;\ g\in\Gamma_{\Omega_0}\setminus\{\mathrm{id}\}$，$\Omega_0$ は Ω の連結成分 $\}>4$．
ここで Möbius 変換 g に対して $\mathrm{tr}^2 g$ は g を表現する $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の元の trace の 2 乗として定める．

実際，Γ_{Ω_0} の原始的な双曲的元 g が代表する Ω_0 の閉測地線の長さ l_g は $|\mathrm{tr}\, g|=2\cosh l_g$ により与えられることが簡単な計算により確かめられる．従って上記の三つの条件が互いに同値であることを見るのは易しい．問題はこれらの条件と補集合の一様完全性との関連であるが，これは閉曲線 γ の Ω における自由ホモトピー類 $[\gamma]$ の双曲的長さ $\ell_\Omega[\gamma]=\inf\{\ell_\Omega(\gamma');\ \gamma'\in[\gamma]\}$ と極値的長さ $E_\Omega[\gamma]$（例えば [1] などを参照のこと）との間の，次の比較定理により記述できる．

補題 2.3 ([69])**．**

$$\frac{2}{\pi}\ell_\Omega[\gamma]\le E_\Omega[\gamma]\le\frac{\ell_\Omega[\gamma]}{\arctan(1/\sinh\ell_\Omega[\gamma])}\le\frac{2}{\pi}\ell_\Omega[\gamma]e^{\ell_\Omega[\gamma]}.$$

実際には，これよりやや弱い形の結果が既に Maskit [47] により得られていたことに注意しておく．

上の評価式は collar lemma を用いた標準的議論により示される．大まかに言えば，双曲面上に十分短い閉測地線があれば，その管状近傍として十分大きな modulus を持つ円環が取れ，その逆も言えるということである（逆は易しい）．collar lemma はこれを定量的に表現した結果である（[27], [11] 参照)．

さて，$[\gamma]$ に対して characteristic ring と呼ばれる円環 A が Ω 内に取ることができ，実際その modulus を用いて $E_\Omega[\gamma]=2\pi/\mathrm{mod}\,A$ と表すことができる (Jenkins-Suita [36]. あるいは [20] を参照のこと)．これより特に評価式 $L(\Omega)\le\pi^2/M(\Omega)\le L(\Omega)e^{L(\Omega)}$ が従い，このことから一様完全性との同値性が分かる（定理 2.1 参照）．

2.4. **計量的特徴付け．** 前小節では双曲的長さに関する性質により境界の一様完全性が特徴付けられることを述べた．ここではさらに双曲密度 $\rho_\Omega(z)$ の境界挙動により一様完全性が特徴付けられることを述べる．まず境界までの Euclid 距離 $\delta_\Omega(z)=\inf\{|z-a|;\ a\in\partial\Omega\}$ を考える．すると双曲密度の領域拡張に関する単調性 (cf. [56]) から容易に $\rho_\Omega\le 1/\delta_\Omega$ を得る．Ω 上の連続計量 $|dz|/\delta_\Omega(z)$ はしばしば**擬双曲計量** (quasihyperbolic metric) と呼ばれ，計算や評価のしやすさから境界が滑らかとは限らない，あるいは双曲計量を持つとは限らない一般次元の領域にも広く利用されている．例えば [21], [22], [25], [40], [66] などを参照のこと．また，[38] にこの計量について良い概説がある．Koebe の 1/4-定理により Ω が $\mathbb{C}$ 内の単連結領域であれば逆向きに $1/4\delta_\Omega\le\rho_\Omega$ が成り立つことが分かるが，一般の領域については必ずしも擬双曲計量と双曲計量は比較可能ではない．実はこの比較可能性が一様完全性の特徴付けを与えるのである．ただし δ_Ω は Euclid 計量により計算されているので無限遠点の取り扱いについては多少の注意が必要である．以下では $0<r\le+\infty$ に対して $\Omega_r=\{z\in\Omega;\ \delta_\Omega(z)<r\}$ と定める．

定理 2.4 (Beardon-Pommerenke [8])**．双曲開集合 Ω に対して，$d=d(\partial\Omega)$ と定める．このとき $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ が一様完全であるための必要十分条件は，ある定数 $c>0$ が存在して Ω_d 上で $c/\delta_\Omega\le\rho_\Omega$ が成立することである．**

実際，この定理そのものが一様完全性の条件が見いだされる出発点となったようである．この結果については他にも [61], [69], [74] などを参照されたい．証明には古典的な Landau の定理を用いるのが本質的であるが，双曲計量の言葉でいえば，それは評価式 $\rho_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(z)\ge 1/|z|(2|\log|z||+C))$

がある定数 $C>0$ に対して成り立つこととして述べられる（この主張に関して最良の結果については [30] および [35] を参照のこと）．さらに，具体的な評価や他の幾何的量との関係については，[86], [69] を見ていただきたい．

2.5. **Schwarz 微分と普遍被覆.** 定数でない有理型函数 f の前 Schwarz 微分 T_f および Schwarz 微分 S_f はそれぞれ

$$T_f = \frac{f''}{f'} = (\log f')', \quad S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = (T_f)' - \frac{1}{2}(T_f)^2$$

により定義される．これらは 1 次写像，Möbius 変換による座標の取り替えに関してそれぞれ 1 次微分，2 次微分としての変換を受けることに注意すると，$j=1,2$ に対して次に定義するノルムによって測るのが自然であることが分かる．すなわち，双曲的開集合 Ω 上の有理型函数 φ に対して $\|\varphi\|_{j,\Omega} = \sup_{z\in\Omega} \rho_\Omega(z)^{-j}|\varphi(z)|$ と定める．$j=2$ の場合は正則二次微分の双曲ノルムとなっており（4.2 節参照）Teichmüller 空間論において非常に重要である（例えば [41] または [20] 参照）．

定理 2.5 (**Pommerenke** [61], [62])**.** **Ω を双曲的開集合とすると，$\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ が一様完全であるための必要十分条件は，ある定数 C が存在して Ω の任意の連結成分 Ω_0 の解析的普遍被覆 $p:\mathbb{D}\to\Omega_0$ に対して $\|S_p\|_{2,\mathbb{D}} \le C$ が成り立つことである．もし $\Omega\subset\mathbb{C}$ であるならば，さらに別の定数 C' が存在して $\|T_p\|_{1,\mathbb{D}} \le C'$ が成り立つこととも同値である．**

定理 2.2 から，まず $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ が一様完全であるためには $I(\Omega)>0$ が必要十分であったことを思い出しておく．単葉函数論における Koebe の面積定理から $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ を単葉函数とすると $|T_f(0)|\le 4$ および $|S_f(0)|\le 6$ が成り立つことが分かる（[41] 参照）．$r_0=\tanh(I(\Omega))>0$ としておく．$\infty\notin\Omega$ と仮定して，$z_0\in\mathbb{D}$ を任意に固定すると，函数 $f(z)=p((r_0z+z_0)/(1+\overline{z_0}r_0z))$ は $\mathbb{D}$ 上単葉となりこれらの結果を適用することにより上の定理における必要性が示される．十分性を示すためには同じテクニックと，次の二つの結果：‘$\|S_f\|_{2,\mathbb{D}}\le 2$ ならば f は $\mathbb{D}$ 上単葉’（Nehari [55]），‘$\|T_f\|_{1,\mathbb{D}}\le 1$ ならば f は $\mathbb{D}$ 上単葉’（Becker [9]）を用いればよい．さらに関連した結果については [53], [44], [69], [86] などを参照のこと．

なお，$\|S_f\|_{2,\mathbb{D}}\le 6$, $\|T_f\|_{1,\mathbb{D}}\le 6$ が $\mathbb{D}$ 上の単葉函数 f について成り立つことが分かるが，さらに Beardon-Gehring [7] によって任意の開集合 Ω 上の単葉函数 f についても $\|S_f\|_{2,\Omega}\le 12$ が成り立つことが証明されている．ところが，これと同様の主張はもはや前 Schwarz 微分については成立しないばかりか，一様完全性の特徴付けにもなっていることが Osgood により示された．

定理 2.6 (**Osgood** [60])**.** **$\Omega\subset\mathbb{C}$ を双曲的開集合とする．$\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ が一様完全であるための必要十分条件は，ある定数 C が存在して Ω 上の任意の単葉函数 f に対して $\|T_f\|_{1,\Omega}\le C$ が成り立つことである．**

2.6. **双曲的リーマン面への拡張.** 2.1 節および 2.2 節で用いた量 $M(\Omega)$ および $L(\Omega)$, $I(\Omega)$ は一般に双曲的リーマン面に対しても同様に定義できる．ただし，この場合は境界が見えているわけではないので，円環 A が Ω の ‘境界を分離する’ とは，埋め込み写像 $A\hookrightarrow\Omega$ が単射な基本群の準同型 $\pi_1(A,*)\to\pi_1(\Omega,*)$ を誘導することとして定義する必要がある．また，擬双曲計量 $|dz|/\delta_\Omega(z)$ も境界が見えない以上定義するのは困難だが，代わりに Hahn 計量と呼ばれる等角不変な連続計量が一般のリーマン面の場合にも（z を局所座標として）次のように定義され，平面領域の場合には擬双曲計量と絶対定数によって比較可能であることが知られている ([24], [26], [52])：

$$\hat\rho_\Omega(z) = \inf_{D\subset\Omega\ \text{単連結}} \rho_D(z)$$

それを使えば Hahn 計量と双曲計量との比較可能性により一様完全性を特徴づけることもできる．実際，これらの条件は一般の面に対しても同値であることが分かる．

定理 2.7 ([69])**.** **任意の双曲的リーマン面 R に対して次の条件は互いに同値である．**

1. $M(R) < +\infty$.
2. $L(R) = 2I(R) > 0$
3. **R 上の Hahn 計量 $\hat\rho_R$ は双曲計量 ρ_R と比較可能である．**

上の同値な条件を満たす双曲的リーマン面は単射半径が正であるから，**有界幾何を持つ** (of bounded geometry) という用語で呼ぶことができるであろう（cf. [64]）．ただ，現在のところ定着した用語は存在しないようである．

前節では補集合の幾何的性質によってコンパクト集合 E の一様完全性を特徴付けることを考えた．この節では E そのものの性質によって一様完全性を特徴付けることを考える．もちろん E そのものは複素構造や計量など良い構造を一般には持たないので，扱いそのものに微妙な解析を要することが多い．以下では $B(a,r)$ は a を中心とする半径 r の閉円板とし，開円板は $\mathbb{D}(a,r)$ により表す．

3.1. **Hausdorff 容量による特徴付け．** $h:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ を $\lim_{t\to 0}h(t)=0$ を満たす非減少連続函数とする．これに対して，$\mathbb{C}$ 内のコンパクト集合 E の可算被覆 (B_k) 全体にわたる和 $\sum_k h(d(B_k))$ の下限を **Hausdorff h-容量** (Hausdorff h-content) と呼び，$\mathcal{L}_h(E)$ で表す.（ここでは B_k は任意の集合としておく.）特に $h(t)=t^\alpha$ である場合は $\mathcal{L}^\alpha(E)$ によって表す．また，$d(B_k)\le\varepsilon$ を満たすような可算被覆についてのみ上の和の下限を取ったものの $\varepsilon\to 0$ の時の極限は **Hausdorff h-測度** (Hausdorff h-measure) として知られ，ここでは $\mathcal{H}_h(E)$ で表し，$h(t)=t^\alpha$ の場合は $\mathcal{H}^\alpha(E)$ で表す．定義から明らかなように $\mathcal{L}_h(E)\le\mathcal{H}_h(E)$ であるから，特に $\mathcal{H}_h(E)=0$ ならば $\mathcal{L}_h(E)=0$ であるが，実はこの逆も成り立つ，すなわち $\mathcal{L}_h(E)=0\Leftrightarrow\mathcal{H}_h(E)=0$ である．$\mathcal{H}^\alpha(E)=0$ となる α の下限が E の Hausdorff 次元と呼ばれることはもはや衆知の通りであろう．ここではそれを $\dim E$ により表す．定義から明らかなように，一次写像 $f(z)=sz+t$ に関して $\mathcal{L}^\alpha(f(E))=|s|^\alpha\mathcal{L}^\alpha(E)$ などが成り立つ．この Hausdorff 容量を用いた一様完全性の特徴付けが Järvi-Vuorinen により与えられた．この直接の系として一様完全集合は正の Hausdorff 次元を持つことが分かる．より具体的な評価については [69] あるいは以下の証明を参照されたい．

定理 3.1 (Järvi-Vuorinen [34]). ***$E\subset\widehat{\mathbb{C}}$ が一様完全であるための必要十分条件は，ある定数 $C>0,\alpha>0$ が存在して次が成り立つことである．***

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^\alpha(E\cap B(a,r))\ge Cr^\alpha,\quad a\in E\setminus\{\infty\},\ 0<r<d(E)/2.} \tag{3.1}$$

3.2. **定理 3.1 の証明.** 以下の証明は [69] によった．$\Omega=\widehat{\mathbb{C}}\setminus E$ とする．まず $\mathcal{L}^\alpha(B(a,r))\le(2r)^\alpha$ であることに注意すれば，十分性については明らかである．そこで必要性を示すことにする．$0<\alpha<\alpha_0:=\log 2/\log(2e^{M^\circ(\Omega)}+1)$ とし，$\beta>1$ を $\alpha=\log 2/\log(2\beta+1)$ を満たすように取れば，$\log\beta>M^\circ(\Omega)$ となる．$c=1/(2\beta+1)$ とおく．

$a=0,r=1$ と仮定して $\mathcal{L}^\alpha(E\cap B)$ が正定数によって下から評価できればよい，ただしここに $B=B(0,1)$ とする．$B_1=B(0,c)$ とする．仮定より $d(E)>2r=2$ だから $E\setminus B\ne\emptyset$ である．円環 $A=\{2c<|z|<2\beta c\}$ を考えると，β の取り方からある点 $x\in E\cap A$ が取れる．そこで $B_2=B(x,c)$ とすると $B_1\cap B_2=\emptyset$ かつ $B_2\subset B$ である．同様にして各 B_j 内に互いに交わらない半径 c^2 とする閉円板 $B_{j,1},B_{j,2}$ で中心が E に含まれるものが選べる．この操作を続けて各 $(j_1,\dots,j_k)\in\{1,2\}^k$ に対して半径 c^k の閉円板 $B_{j_1,\dots,j_k}$ で中心が E に含まれ，$B_{j_1,\dots,j_k}\subset B_{j_1,\dots,j_{k-1}}$ かつ $B_{j_1,\dots,j_{k-1},1}\cap B_{j_1,\dots,j_{k-1},2}=\emptyset$ となるものが順次取り出せる．そこで

$$F=\bigcap_{k=1}^\infty\bigcup_{j_1,\dots,j_k\in\{1,2\}}B_{j_1,\dots,j_k}$$

と定めると，これは E に含まれる Cantor 集合となる．証明には直接関係ないが，k を固定すれば族 $(B_{j_1,\dots,j_k})$ は F の有限被覆となり，$\sum d(B_{j_1,\dots,j_k})^\alpha=2^k(2c^k)^\alpha=2^\alpha$ であることが分かるので $\mathcal{H}^\alpha(F)\le 2^\alpha$ になっている．実際に $\mathcal{L}^\alpha(F)$ が正になっていることをこれから示そう．μ を $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ 上の等確率分布の Bernoulli 測度から誘導される F 上の測度とする．つまり，μ は $\mathbb{C}$ 上の Borel 確率測度で F に台を持ち，$\mu(B_{j_1,\dots,j_k})=2^{-k}$ を満たすとする．次に $A=B(b,t)$ を任意の閉円板とするとき，$\mu(A)\le 18t^\alpha$ を示す．$t\ge 1$ ならば自明なので $t<1$ と仮定する．k を $c^{k+1}<t\le c^k$ となるように選ぶ．$J=\{j=(j_1,\dots,j_k);\,A\cap B_j\ne\emptyset\}$ とすると，$\cup_{j\in J}B_j\subset B(b,t+2c^k)$ であるから，これらの円板の面積を考えれば $\#J\cdot(c^k)^2\le(t+2c^k)^2$ を得る．従って，$\#J\le(2+tc^{-k})^2\le 9$ を得る．このことから，$\mu(A)\le\mu(\cup_{j\in J}B_j)=\#J\cdot 2^{-k}\le 18\cdot 2^{-k-1}<18t^\alpha$ が示される．

これを用いると，次のように $\mathcal{L}^\alpha(F)$ の評価が得られる．(A_n) を任意の F の可算被覆とする．$d_n=d(A_n)$ とすると各 A_n は半径 d_n のある閉円板 A_n' に含まれる．従って上の評価から $\mu(A_n)\le\mu(A_n')\le 18d_n^\alpha$ である．これより，

$$1=\mu(F)\le\sum_n\mu(A_n)\le 18\sum_n{d_n}^\alpha$$

となり，被覆に関する下限を取ることにより $\mathcal{L}^\alpha(F)\ge 1/18$ を得る．従って $\mathcal{L}^\alpha(E\cap B)\ge 1/18$ が任意の $\alpha<\alpha_0$ に対して成立することが分かるが，α 次元 Hausdorff 容量の次元に関する左連続性 [59] を使

えば，$\mathcal{L}^{\alpha_0}(E\cap B) \geq 1/18$ が分かる．特により具体的な評価 $\dim E \geq \alpha_0 = \log 2/\log(2e^{M^\circ(\Omega)}+1) \geq \log 2/(M^\circ(\Omega)+\log 3)$ が得られたことになる．

3.3. **対数容量による特徴付け．** $\mathbb{C}$ 内のコンパクト集合 E の対数容量 (logarithmic capacity) $\mathrm{Cap}\, E$ は，$\widehat{\mathbb{C}}\setminus E$ の非有界な成分 Ω^* の ∞ に極を持つ Green 函数 G が無限遠点の周りで漸近挙動 $G(z) = \log|z| - \log \mathrm{Cap}\, E + o(1)$ を持つとして定義できる．ただし Ω^* が Green 函数を持たない場合は $\mathrm{Cap}\, E = 0$ と定める．例えば $\mathrm{Cap}\, B(a,r) = r$ であり，一次写像 $f(z) = sz+t$ について $\mathrm{Cap}\, f(E) = |s|\mathrm{Cap}\, E$ が成り立つ．Pommerenke は次の著しい特徴付けを与えた．

定理 3.2 (Pommerenke [61]). ***$E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が一様完全であるための必要十分条件は，ある定数 $c > 0$ が存在して次が成り立つことである：***

$$\mathbf{Cap}\,(E\cap B(a,r)) \geq cr, \quad a \in E\setminus\{\infty\}, 0 < r < d(E).$$

Pommerenke は対数容量の超越直径による特徴付けを用いて，非常に巧妙な計算の末に上記の結果に到達している．ここでは前小節の Hausdorff 容量の評価を用いてこの定理に別証明を与えることにする．Frostman による定理 '$\int_0^1 h(t)dt/t < +\infty$ であるような h に対して $\mathcal{H}_h(E) > 0$ ならば $\mathrm{Cap}\, E > 0$ である' の辻による証明 [80, pp. 65–66] をじっくり眺めると次のことが読みとれる．すなわち，ある絶対定数 $C_1 > 0$ が存在して，直径 1 の閉円板に含まれるような任意のコンパクト集合 E に対して次が成り立つ：

$$\mathrm{Cap}\, E \geq \exp\left(-C_1\frac{\int_0^1 h(t)dt/t}{\mathcal{L}_h(E)}\right).$$

今(3.1) を仮定する．$f(z) = z/2r$ とすれば $F = f(E\cap B(a,r))$ および $h(t) = t^\alpha$ に対して上の不等式が適用できる．ここで $\mathcal{L}^\alpha(F) = (2r)^{-\alpha}\mathcal{L}^\alpha(E\cap B(a,r)) \geq 2^{-\alpha}C$ に注意すると $\mathrm{Cap}\,(E\cap B(a,r)) = 2r\mathrm{Cap}\,(F) \geq 2r\exp(-2^\alpha C_1/\alpha C)$ となる．よって $c = 2\exp(-2^\alpha C_1/\alpha C)$ とすれば上の結論が得られる．逆は明らかである．

この結果から下方容量密度 (lower capacity density) $\liminf_{r\to 0}\mathrm{Cap}\,(E\cap B(a,r))/r$ が下から定数で評価されることになる．特に Wienrer の判定条件から一様完全集合の各点は Dirichlet 問題に関する正則点であることが分かる（[80] 参照）が，次の項で説明するようにもっと強い意味の正則性が成り立つ．

対数容量ではなく，コンデンサ容量による一様完全性の同様の特徴付けも知られている（[34], [65] など参照）．

3.4. **Dirichlet 問題の Hölder 正則性による特徴付け．** Ω を境界が正の対数容量を持つ開集合とし，Dirichlet 問題

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{on } \partial\Omega$$

の（Perron-Wiener-Brelot の意味での）解 u について考える．ただし，ここでは簡単のために境界値 φ は有界な Borel 函数とし，解としては有界なもののみを考える．この意味で解は一意に存在するので，それを $u = H^\Omega\varphi$ と表記することにする．詳細については例えば [80], [29], [16] などを参照されたい．

境界の大きさを測るのによく用いられるものとして，調和測度がある (cf. [56])．F を $\partial\Omega$ に含まれる Borel 集合とする．F の定義函数 χ_F に対する Dirhiclet 問題の解 $H^\Omega\chi_F$ を F の Ω における調和測度と呼び，$\omega(\cdot,F,\Omega)$ により表す．点 $z\in\Omega$ を固定すると，集合函数 $F\mapsto\omega(z,F,\Omega)$ は境界上の有界連続函数 φ から，その Ω への有界調和拡張 $H^\Omega\varphi$ の z における値を対応させる連続線型汎函数 $\varphi\mapsto H^\Omega\varphi(z)$ を表現する Radon 測度になっている．E をコンパクト集合として $\Omega = \widehat{\mathbb{C}}\setminus E$ とする．各 $a\in\partial_{\mathrm{b}}\Omega$ および $0 < r$ に対して $\omega_{a,r,\Omega}$ を $\Omega\cap\mathbb{D}(a,r)$ における $\Omega\cap\partial B(a,r)$ の調和測度とし，$\hat{\omega}_{a,r,\Omega}$ を Ω における $\partial\Omega\setminus\mathbb{D}(a,r)$ の調和測度とする．これらをそれぞれ a における局所調和測度，大域調和測度と呼ぶことにする [74]．最小値の原理から $\hat{\omega}_{a,r,\Omega} \leq \omega_{a,r,\Omega}$ が $\Omega\cap\mathbb{D}(a,r)$ において成立することに注意しておく．このとき，次の結果が成り立つ．

定理 3.3. ***正数 $0 < \alpha < 1$ に対して次の条件を考える．***

- (i) ***ある正定数 C があって，$\omega_{a,r,\Omega}(z) \leq C(|z-a|/r)^\alpha$ が任意の $a\in\partial_{\mathrm{b}}\Omega$, $0 < r < d(\partial\Omega)$, $z\in\Omega\cap\mathbb{D}(a,r)$ について成り立つ．***
- (ii) ***ある正定数 C があって，$\hat{\omega}_{a,r,\Omega}(z) \leq C(|z-a|/r)^\alpha$ が任意の $a\in\partial_{\mathrm{b}}\Omega$, $0 < r < d(\partial\Omega)$, $z\in\Omega\cap\mathbb{D}(a,r)$ について成り立つ．***
- (iii) ***$\partial_{\mathrm{b}}\Omega$ 上の境界値函数 φ が α-Hölder 連続ならば解 $H^\Omega\varphi$ も α-Hölder 連続である．***

このとき，E が一様完全であることと，ある α に対して (i) が成り立つことは同値である．また，(i) ならば (ii), (iii) が成り立つ．さらに，もし Ω が有界領域ならば，(i) と (ii) は同値になり，(iii) がある $\alpha' > \alpha$ に対して成り立てば，(i) が成り立つ．

一様完全性と性質 (i) の同値性は本質的には Ancona [4] によるがその論文では次元が $n > 2$ の場合しか扱われておらず，上の形は [74] による．証明には定理 3.2 を用いればよい．また (i) ⇒ (ii), (iii) も [74] による．後半の主張は相川 [2] によって最近示された．

なお，この結果から特に一様完全な境界を持つ領域の Green 函数が境界において α-Hölder 連続であることが分かる．このことは Carleson-Gamelin の教科書 [15] に証明なしに述べられているが，文献に証明が載ったのはおそらく Lithner [42] が最初であろう．Siciak [65] も別証明を与えている．なお，この逆については一般には成立しない（3.6 節参照）．なお，[15] にも述べられているように，α-Hölder 連続な調和函数が α より低い次元のコンパクト集合に関して除去可能になるという Carleson の結果 [14] を使えば，定理 3.3 の条件 (i) が成立するとき境界が α 以上の Hausdorff 次元を持つことも分かる．

3.5. **Fuchs 群による特徴付け．** これはむしろ前節に含めるべき特徴付けかもしれないが，証明には対数容量の評価を用いるのでこの節で論じることにした．Ω は $\widehat{\mathbb{C}}$ の双曲的部分領域とし，Γ を解析的普遍被覆 $p : \mathbb{D} \to \Omega$ の被覆変換群として得られる Fuchs 群とする．このとき，次の特徴付けが得られる．

定理 3.4 (Pommerenke [62]). 双曲的領域 Ω を一意化する Fuchs 群 Γ とすると，次の各々は，境界 $\partial\Omega$ が一様完全であるための必要十分条件である．

(i) ある定数 $c_1 > 0$ が存在して次が成立する：

$$\left|\frac{g(\zeta)-\zeta}{1-\bar{\zeta}g(\zeta)}\right| \geq c_1, \quad \zeta \in \mathbb{D},\ g \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$$

(ii) ある定数 $c_2 > 0$ が存在して次が成立する：

$$\prod_{g \in \Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}} \left|\frac{g(\zeta)-\zeta}{1-\bar{\zeta}g(\zeta)}\right| \geq c_2, \quad \zeta \in \mathbb{D}$$

条件 (ii) から特に Γ による軌道 $\{g(\zeta);\, g \in \Gamma\}$ が単位円板上の有界解析函数に関する補間点列であることが分かる（補間点列については [13] を参照のこと）．上の条件 (i) は定理 2.2 を言い換えただけなので，問題は (i) より遙かに強く見える条件 (ii) を一様完全性から導くことにある．$\infty \in E = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ としてよい．すると定理 3.2 から，ある定数 $c > 0$ に対して $\mathrm{Cap}\,(E \cap B(a, r)) \geq cr$ が任意の $a \in E \setminus \{\infty\}$ および $r > 0$ に対して成り立つ．さて，$\zeta_0 \in \mathbb{D}$ を固定する．必要なら $p(\zeta)$ を $p((\zeta+\zeta_0)/(1+\overline{\zeta_0}\zeta))$ で置き換えることにより，最初から $\zeta_0 = 0$ として証明すればよい．$z_0 = p(0)$ として $E^* = \{(a-z_0)^{-1};\, a \in E\}$ と定める．$a_0 \in \partial\Omega$ を $\delta_\Omega(z_0) = |z_0 - a_0| =: r_0$ となる点とする．すると $\mathrm{Cap}\, E^* \geq \mathrm{Cap}\,(E \cap B(z_0, 2r_0))^* \geq \mathrm{Cap}\,(E \cap B(z_0, 2r_0))/4{r_0}^2 \geq \mathrm{Cap}\,(E \cap B(a_0, r_0))/4{r_0}^2 \geq c/4r_0$ となる．ここで $r_0 \leq 1/\rho_\Omega(z_0) = |p'(0)|$ であるから最終的に $\mathrm{Cap}\, E^* \geq c/4|p'(0)|$ を得る．G を z_0 を極とする Ω の Green 函数とすると，$z \to z_0$ のとき $G(z) = \log(1/|z - z_0|) - \log \mathrm{Cap}\, E^* + o(1)$ となる．一方 Myrberg の定理 [80, p.522] から $G(p(\zeta)) = \sum_{g\in\Gamma} \log|(1 - \overline{g(0)}\zeta)/(\zeta - g(0))| = \log(1/|\zeta|) + \sum_{g\in\Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}} \log(1/|g(0)|) + O(|\zeta|)$ となるので，$\prod_{g\in\Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}} |g(0)| = |p'(0)|\mathrm{Cap}\, E^* \geq c/4$ が得られる．よって証明された．なお，この他に Green 函数や Fuchs 群を用いた一様完全性の特徴付けが González [23] により与えられていることを付記しておく．

3.6. **Markov 不等式．** 近似理論において重要な役割を果たしている Markov 不等式と呼ばれる一連の結果がある．もともとは区間 $[0, 1]$ 上の実函数の近似に用いられたが，その後色々な方向に拡張され応用されている．ここではその一つの定式化について述べる．複素平面内のコンパクト集合 E が**大域 Markov 不等式を成り立たせる**とは，ある定数 $C > 0, \rho \geq 1$ があって，任意の（一変数複素係数）多項式 P に対して $\|P'\|_E \leq C(\deg P)^\rho \|P\|_E$ が成立することをいう．ただし，ここで $\|f\|_E = \sup\{|f(z)|; z \in E\}$ とする．また，$\widehat{\mathbb{C}}$ 内の閉集合 E が**局所 Markov 不等式を成り立たせる**とは，任意の正整数 k に対してある定数 $c = c(k)$ が存在して，任意の k 次多項式 P に対して $r\|P'\|_{E\cap B(a,r)} \leq c\|P\|_{E\cap B(a,r)}$ が $a \in E \setminus \{\infty\}$ および $0 < r < d(E)$ に対して成り立つことをいう．実は次の結果が成立する．

定理 3.5 (Lithner [42]).　コンパクト集合 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が一様完全であるための必要十分条件は，E が局所 Markov 不等式を成り立たせることである．このとき，さらに $E \subset \mathbb{C}$ ならば，大域 Markov 不等式が成立する．

Green 函数が境界において Hölder 連続ならば大域 Markov 不等式が保たれることが知られている．Lithner [42] は境界が一様完全でないにもかかわらず Green 函数が Hölder 連続であるような例を Cantor 集合を用いて構成した．従って，大域 Markov 不等式が成り立つからといって，局所 Markov 不等式が成り立つとは限らない．なお，退化した境界成分を持たない同様の例が [74] にもある．

4. 一様完全集合の持つ顕著な性質

一様完全性の特徴付けとまではいえないまでも，一様完全集合について多くの顕著な性質が知られている．この節ではそのいくつかについて手短に解説する．

4.1. **スペクトルの底．** ここでは Ω は双曲的領域とする．$\partial\Omega$ が一様完全であることは，Ω の単純閉測地線の長さの下限が正であることにほかならなかった（定理 2.2 ）．一方，このような単純閉測地線の長さのスペクトルと，Laplacian のスペクトルとの間には，Selberg の跡公式などを通して著しい類似関係が成立することが，少なくとも解析的有限なリーマン面の場合などについては認識されている（例えば [11] を参照のこと）．我々の場合もこの種の結果が成立することを以下に説明する．

$-\Delta$ を Ω 上の双曲計量に関する Laplace-Beltrami 作用素とする，すなわち $-\Delta = -\rho_\Omega(z)^{-2}(\partial_x^2 + \partial_y^2)$. これは $C_c^\infty(\Omega)$ に非負自己共役作用素として作用するので $L^2(\Omega)$ に一意的に（非有界）非負自己共役作用素として拡張でき，スペクトルは $[0, +\infty)$ に含まれる．スペクトルの下限を Ω のスペクトルの**底** (bottom) と呼び $\lambda(\Omega)$ により表すことにする．この量は他の大域的な幾何学的量と結びついていることが知られている [77]．特に $\eta(\Omega)$ を Ω を一意化する Fuchs 群 Γ_Ω の収束指数とする（これは Γ_Ω の非接極限集合の Hausdorff 次元とも等しい．例えば [57] を見よ）と，Elstrodt-Patterson-Sullivan の定理 [77] により次の関係式が分かる．

$$\lambda(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \eta(\Omega) \le \frac{1}{2} \text{のとき} \\ 4\eta(\Omega)(1-\eta(\Omega)), & \frac{1}{2} \le \eta(\Omega) \le 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

これより特に $\lambda(\Omega) > 0 \Leftrightarrow \eta(\Omega) < 1$ であることが分かる．（この場合，特に指数 1 の Poincaré 級数が収束し、従って Ω が Green 函数を持つことが分かる [80]．このことは定理 3.4 とも関連する．）これについて Fernández は次のことを示した．関連した結果については [19], [3] などを参照のこと．

定理 4.1 (Fernández [18]).　Ω が一様完全境界を持つ領域とすると $\lambda(\Omega) > 0$ である．

Cheeger の不等式を用いて，より定量的な結果 $\lambda(\Omega) \ge 1/(1+\pi/L(\Omega))^2$ も得られている [75]. なお [19] でも議論されているように，上の結果の逆は一般には成立しない．

4.2. **正則二次微分．** ここでは Bers 空間と呼ばれる Teichmüller 空間論においてもっとも重要な空間との関連について述べる．Ω 上の正則二次微分 (holomorphic quadratic differential) $\varphi = \varphi(z)dz^2$ に対して 2 種類のノルム $\|\varphi\|_1 = \iint_\Omega |\varphi(z)| dxdy$, $\|\varphi\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} \rho_\Omega(z)^{-2}|\varphi(z)|$ を定め，それらによる複素 Banach 空間をそれぞれ $A_2(\Omega)$, $B_2(\Omega)$ と表記することにする．ノルム $\|\varphi\|_\infty$ は 2.5 節において定義されたものと同じで，双曲ノルムまたは Nehari ノルムと呼ばれる．一般のリーマン面に対して包含関係 $A_2(\Omega) \subset B_2(\Omega)$ が成り立つかどうかはしばらく未解決の問題であったが，Niebur-Sheingorn [58] により完全に解決された．この包含関係が成り立つには $L^*(\Omega) = \inf \ell_\Omega(\gamma)$ が正であることが必要十分である，ただしここで下限は，ある puncture を何周かする loop に homotopic ではないような全ての非自明な閉曲線 γ にわたるものとする．より定量的な結果については [49] または [73] を参照されたい．Ω が puncture を持たなければ $L(\Omega) = L^*(\Omega)$ であるから次の結果を得る．

定理 4.2. Ω を puncture を持たない双曲的平面領域とする．このとき $A_2(\Omega) \subset B_2(\Omega)$ が成り立つための必要十分条件は $\partial\Omega$ が一様完全であることである．

正則二次微分を用いて等角不変計量 $q_\Omega(z) = \sup\{|\varphi(z)|^{1/2}; \varphi \in A_2(\Omega), \|\varphi\|_1 = \pi\}$ が定義される．この計量は筆者によって導入された．詳しくは [70], [73] を参照されたい．この計量を用いて次のような特徴付けも得られている．これはまた双曲的リーマン面に対しても適用可能な概念で，やはり有界幾何を持つことと同等である．

定理 4.3 ([73])**．双曲的領域 Ω に対して，境界が一様完全であるためには，次の各条件が成り立つことが必要十分である．**

1. **計量 q_Ω は Hahn 計量 $\hat{\rho}_\Omega$ と比較可能．**
2. **計量 q_Ω は双曲計量 ρ_Ω と比較可能．**

$\Omega \subset \mathbb{C}$ の場合にはこの定理において Hahn 計量を擬双曲計量に置き換えてもよい．なお，$q_\Omega \leq \hat{\rho}_\Omega$ は常に成り立つが，q_Ω と ρ_Ω の間には一般に大小関係は成立しない（[70] 参照）．

4.3. **その他の性質．** ここで詳しく述べきれなかったその他の一様完全性の特徴付けや性質について簡単に文献を紹介しておく．BMO 空間を用いた特徴付けについては，[60], [24], [28] などを参照のこと．双曲距離と Euclid 距離との関連によって一様完全性を特徴付けるアイデアは [61] または [43] による．擬等角写像による同質性との関連は [46] により指摘されている．

5. 一様完全集合の例

ここまでは一様完全集合の一般的性質について見てきたが，この節では実際にどのような集合が一様完全になるのか具体例を通して概観したい．

5.1. **Klein 群．** Klein 群とは複素 Lie 群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の離散部分群のことをいう．詳しくは [48], [50] などを参照のこと．Klein 群 G は $\widehat{\mathbb{C}}$ に作用するが，その不連続領域を $\Omega(G)$ で，極限集合と呼ばれるその補集合を $\Lambda(G)$ で表すことにする．ここでは簡単のために楕円的元 (elliptic element) を含まないもののみを考え，さらに自明な場合を避けるために $\Lambda(G)$ は 3 点以上からなる，従って完全集合になる（非初等的と呼ばれる）場合のみを考える．すると次の結果が成り立つ．

定理 5.1 ([71])**．商リーマン面 $R = \Omega(G)/G$ が条件 $L^*(R) > 0$ を満たすならば極限集合 $\Lambda(G)$ は一様完全である．**

証明には定理 2.2 の条件 (i) を用いればよい．実際，γ を $\Omega(G)$ 内の任意の非自明な閉曲線とする．これを R に射影すると像 γ' は非自明な閉曲線となり，しかも puncture を回る loop に homotopic ではない（これは $\Lambda(G)$ が完全であることから分かる）．従って $\ell_\Omega(\gamma) \geq \ell_R(\gamma') \geq L^*(R)$ となり，$L(\Omega(G)) \geq L^*(R) > 0$ が従う．

4.2 節で述べた Niebur-Sheingorn の定理により，条件 $L^*(R) > 0$ は $A_2(R) \subset B_2(R)$ に同値であることに注意しておく．条件 $L^*(R) > 0$ は解析的有限なリーマン面については常に成り立つので，Ahlfors の有限性定理から任意の非初等的有限生成 Klein 群についてその極限集合は一様完全であることが分かる．以下，この結果について歴史的経緯を記しておく．有限生成 Schottky 群については [8] によって極限集合の一様完全性が示されていたが，対数容量による特徴付け（定理 3.2）を見れば実質的にこの結果は辻 [79] により示されていたように思われる．一般の有限生成 Klein 群については最初に [62] に証明が現れた．Canary [12] はそれを解析的有限な場合に拡張した．なお，無限生成の場合は $\Lambda(G)$ が一様完全でないことも起こりうる．そのような具体例については [71] を参照のこと．極限集合の一様完全性は，例えば Bishop-Jones [10] によって Klein 群論において効果的に用いられていることを記しておく．

5.2. **複素力学系．** f を次数 2 以上の 1 変数有理函数とすると，その Julia 集合 $J(f)$ は f の作用により不変であるから，ある種の自己相似性を持っていると理解されている．Julia 集合など複素力学系の基本的な性質については [6], [15], [54] などを参照のこと．実際次の結果が知られている．

定理 5.2．次数 2 以上の有理函数の Julia 集合は一様完全である．

この結果は 1992 年頃に Mañe-da Rocha [45], Hinkkanen [32] および Eremenko [17] によって独立に証明された．なお，f が双曲的である場合は既に Pommerenke [62] が示している．これらは背理法を用いて示されていたため具体的な一様完全性の評価はなかったが，筆者は [72] において Fatou 集合において定義される双曲幾何的な量により一つの評価を与えた．(実はそれは Eremenko の証明と基本的に同じアイデアによるものであったが，彼の論文 [17] は投稿されることもなかったため筆者は [72] を完成させるまでそのことを知らなかった．) 超越的な整函数の場合にはもはや一般には一様完全でないことが Baker の例 [5] を見れば分かる．超越的有理型函数の場合については Zheng による研究 [89], [87] がある．

なお，有理半群の Julia 集合（極限集合）の一様完全性については，生成元が全て 2 次以上である場合に Hinkkanen-Martin [33] によって，一般の場合は，有限生成 Klein 群や自己相似集合も含

む形で Stankewitz [67] によって示されている．アトラクターについても Stankewitz [68] による研究がある．

6. 展望

最後に一様完全性について，今後の可能な研究の方向性について論じておきたい．

6.1. 高次元化. 本稿では主に実 2 次元の場合に限って論じてきたが，もちろん一般次元の Euclid 空間または球面，あるいはもっと一般に距離空間において考えることもでき，その方向における研究も既にいくつかある．実際，Ancona [4], Siciak [65], 相川 [2] は高次元における一様完全性についてポテンシャル論的立場から論じている．ただ，$n = 2$ と $n \geq 3$ の場合では Green 函数の核が本質的に異なるので，2 次元の場合の拡張といっても拡張の仕方によっては同値にならないこともあるので注意が必要である．また，Vuorinen [83] および Järvi-Vuorinen [34] はコンデンサ容量を用いた一様完全性の特徴付けを用いて，高次元擬正則写像の境界挙動について研究を行っている．なお，Tukia-Väisälä [81] は最初から一般の距離空間の場合を扱っているが，その後それに続く本格的研究は Trotsenko-Väisälä [78] などを除けば非常に少ないのが現状である．

なお，ここで論じた一様完全性は，定義を見れば分かるように，半径方向に関する本質的には 1 次元的な概念である．従って，たとえば Hausdorff 次元の下からの評価にしても自ずと限界がある．この部分を高次元化した概念が定式化できれば，高次元空間における，より精密な評価が可能になるかもしれない．そのようなものの一つとして，Markov 不等式に関するものがある．$\mathbb{R}^n$ 内の集合について，実 n 変数多項式に関する局所 Markov 不等式が成り立つための条件が既に知られている．例えば [37] を参照のこと．これをさらに一般化した概念が Väisälä-Vuorinen-Wallin [82] により与えられている．なお，実際にこのような条件を満たす集合に対する Hausdorff 次元の下からの評価も知られている [85].

6.2. 対立概念. 一様完全性は，ある意味で集合の '密性' を保証する概念であった．一方，対立概念として集合の '疎性' を保証するものも役に立つであろうと期待される．そのようなものとして，例えば porosity（多孔性）という概念がある．これはコンパクト集合 E 内の任意の点 a と $0 < r < d(E)$ に対して $B(a, r)$ 内に，ある決まったサイズの小さい円板 $B(b, cr)$ で E とは交わらないものが取れることを意味する．Lebesgue 点を用いる議論により，この場合 2 次元 Lebesgue 測度が 0 であることは直ちに分かるが，さらに packing dimension を用いて Hausdorff 次元の上からの評価ができることなどが知られており，複素力学系などにおいて有効に利用されている（例えば [39], [51], [63] などを参照）.

6.3. 精密化. 一様完全性は相似変換に関して不変な概念であったが，それを放棄して例えば 1.1 節における定義で c を r の函数 $c(r)$ にすれば，もっと精密化した概念が得られる．この場合でも，より詳しい解析をすることにより，なにがしかの有益な情報が得られる．この方面の研究はまだあまりされていないが，筆者もこの方向の研究を進めつつある [76].

また，一様完全性は $r \in (0, d(E))$ だけでなく，$a \in E$ についても一様な条件であった．これを固定した一点 a についてのみ考えることは可能である．このような条件は既に Vuorinen [84] により擬等角写像の角極限 (angular limit) を調べるために用いられている．さらに，この局所化された条件からも非常に有益な情報が得られることが Zheng [88] により論じられている．また，Dirichlet 問題に関する強い意味での正則性についてもこのような観点から筆者により研究されている [74].

References

1. L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, van Nostrand, 1966.
2. H. Aikawa, *Hölder continuity of Dirichlet solution for a general domain*, preprint, 2001.
3. V. Alvarez, D. Pestana, and J. M. Rodríguez, *Isoperimetric inequalities in Riemann surfaces of infinite type*, Rev. Math. Iberoamericana **15** (1999), 353–427.
4. A. Ancona, *On strong barriers and inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$, J. London Math. Soc. (2) **34** (1986), 274–290.
5. I. N. Baker, *Multiply connected domains of normality in iteration theory*, Math. Z. **81** (1963), 206–214.
6. A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, 1991.
7. A. F. Beardon and F. W. Gehring, *Schwarzian derivatives, the Poincaré metric and the kernel function*, Comment. Math. Helv. **55** (1980), 50–64.
8. A. F. Beardon and Ch. Pommerenke, *The Poincaré metric of plane domains*, J. London Math. Soc. (2) **18** (1978), 475–483.
9. J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 23–43.
10. C. J. Bishop and P. W. Jones, *Hausdorff dimension and Kleinian groups*, Acta Math. **179** (1997), 1–39.
11. P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Birkhäuser, 1992.

12. R. D. Canary, *The Poincaré metric and a conformal version of a theorem of Thurston*, Duke Math. J. **64** (1991), 349–359.
13. L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.
14. ———, *Removable singularities of continuous harmonic functions on* $\mathbb{R}^m$, Math. Scand. **12** (1963), 15–18.
15. L. Carleson and T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
16. J. L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Springer-Verlag, 1984.
17. A. Eremenko, *Julia sets are uniformly perfect*, unpublished manuscript, 1992.
18. J. L. Fernández, *Domains with strong barrier*, Rev. Mat. Iberoamericana **5** (1989), 47–65.
19. J. L. Fernández and J. M. Rodríguez, *The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **15** (1990), 165–183.
20. F. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*, Wiley-Intersciences, New York, 1987.
21. F. W. Gehring and B. G. Osgood, *Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric*, J. Analyse Math. **36** (1979), 50–74.
22. F. W. Gehring and B. P. Palka, *Quasiconformally homogeneous domains*, J. Analyse Math. **30** (1976), 172–199.
23. M. J. González, *Uniformly perfect sets, Green's function, and fundamental domains*, Rev. Mat. Iberoamericana **8** (1992), 239–269.
24. Y. Gotoh, *On holomorphic maps between Riemann surfaces which preserve BMO*, J. Math. Kyoto Univ. **35** (1995), 299–324.
25. ———, *Domains with growth conditions for the quasihyperbolic metric*, J. Anal. Math. **82** (2000), 149–173.
26. K. T. Hahn, *Some remarks on a new pseudo-differential metric*, Ann. Polon. Math. **39** (1981), 71–81.
27. N. Halpern, *A proof of the collar lemma*, Bull. London Math. Soc. **13** (1981), 141–144.
28. J. Heinonen and S. Rohde, *Koenigs functions, quasicircles and* BMO, Duke Math. J. **78** (1995), 301–313.
29. L. L. Helms, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-interscience, New York, 1969.
30. J. A. Hempel, *The Poincaré metric on the twice punctured plane and the theorems of Landau and Schottky*, J. London Math. Soc. (2) **20** (1979), 435–445.
31. D. A. Herron, X. Liu, and D. Minda, *Ring domains with separating circles or separating annuli*, J. Analyse Math. **53** (1989), 233–252.
32. A. Hinkkanen, *Julia sets of rational functions are uniformly perfect*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **113** (1993), 543–559.
33. A. Hinkkanen and G. J. Martin, *Julia sets of rational semigroups*, Math. Z. **222** (1996), 161–169.
34. P. Järvi and M. Vuorinen, *Uniformly perfect sets and quasiregular mappings*, J. London Math. Soc. **54** (1996), 515–529.
35. J. A. Jenkins, *On explicit bounds in Landau's theorem.* II, Canad. J. Math. **33** (1981), 559–562.
36. J. A. Jenkins and N. Suita, *On analytic selfmappings of Riemann surfaces* II, Math. Ann. **209** (1974), 109–115.
37. A. Jonsson, P. Sjögren, and H. Wallin, *Hardy and Lipschitz spaces on subsets of* $\mathbb{R}^n$, Studia Math. **80** (1984), 141–166.
38. P. Koskela, *Old and new on the quasihyperbolic metric*, Quasiconformal mappings and analysis (Ann Arbor, MI, 1995), Springer, 1998, pp. 205–219.
39. P. Koskela and S. Rohde, *Hausdorff dimension and mean porosity*, Math. Ann. **309** (1997), 593–609.
40. N. Langmeyer, *The quasihyperbolic metric, growth, and John domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **23** (1998).
41. O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, 1987.
42. J. Lithner, *Comparing two versions of Markov's inequality on compact sets*, J. Approx. Theory **77** (1994), 202–211.
43. W. Ma, F. Maitani, and D. Minda, *Two-point comparisons between hyperbolic and Euclidean geometry on plane regions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **52** (1998), 83–96.
44. W. Ma and D. Minda, *Euclidean linear invariance and uniform local convexity*, J. Austral. Math. Soc. **52** (1992), 401–418.
45. R. Mañé and L. F. da Rocha, *Julia sets are uniformly perfect*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 251–257.
46. P. MacManus, R. Näkki, and B. Palka, *Quasiconformally bi-homogeneous compacta in the complex plane*, Proc. London Math. Soc. (3) **78** (1999), 215–240.
47. B. Maskit, *Comparison of hyperbolic and extremal lengths*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **10** (1985), 381–386.
48. ———, *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, 1988.
49. K. Matsuzaki, *Bounded and integrable quadratic differentials: hyperbolic and extremal lengths on Riemann surfaces*, Geometric Complex Analysis (J. Noguchi *et al.*, ed.), World Scientific, Singapore, 1996, pp. 443–450.
50. K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*, Oxford Univ. Press, 1998.
51. C. T. McMullen, *Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets*, Acta Math. **180** (1998), 247–292.
52. D. Minda, *The Hahn metric on Riemann surfaces*, Kodai Math. J. **6** (1983), 57–69.
53. ———, *The Schwarzian derivative and univalence criteria*, Contemporary Math. **38** (1985), 45–52.
54. S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda, *Holomorphic dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1999.
55. Z. Nehari, *The Schwarzian derivative and schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 545–551.
56. R. Nevanlinna, *Eindeutige Analytische Funktionen*, Springer-Verlag, 1953.
57. P. J. Nicholls, *The Ergodic Theory of Discrete Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

58. D. Niebur and M. Sheingorn, *Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), 239–258.
59. A. O'Farrell, *Continuity properties of Hausdorff content*, J. London Math. Soc. (2) **13** (1976), 403–410.
60. B. G. Osgood, *Some properties of f''/f' and the Poincaré metric*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 449–461.
61. Ch. Pommerenke, *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*, Arch. Math. **32** (1979), 192–199.
62. ———, *On uniformly perfect sets and Fuchsian groups*, Analysis **4** (1984), 299–321.
63. F. Przytycki and S. Rohde, *Porosity of Collet-Eckmann Julia sets*, Fund. Math. **155** (1998), 189–199.
64. J. Roe, *An index theorem on open manifolds.* I, J. Diff. Geom. **27** (1988), 87–113.
65. J. Siciak, *Wiener's type regularity criteria on the complex plane*, Ann. Polon. Math. **66** (1997), 203–221.
66. W. Smith and D. A. Stegenga, *Exponential integrability of the quasi-hyperbolic metric on Hölder domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **16** (1991), 345–360.
67. R. Stankewitz, *Uniformly perfect sets, rational semigroups, Kleinian groups and IFS's*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2569–2575.
68. ———, *Uniformly perfect analytic and conformal attractor sets*, Bull. London Math. Soc. **33** (2001), 320–330.
69. T. Sugawa, *Various domain constants related to uniform perfectness*, Complex Variables **36** (1998), 311–345.
70. ———, *Unified approach to conformally invariant metrics on Riemann surfaces*, in Proceedings of the Second ISAAC Congress (H. G. W. Begehr, R. P. Gilbert, and J. Kajiwara, eds.), Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 1117–1127.
71. ———, *Uniform perfectness of the limit sets of Kleinian groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 3603–3615.
72. ———, *An explicit bound for uniform perfectness of Julia sets of rational maps*, to appear in Math. Z.
73. ———, *A conformally invariant metric on Riemann surfaces associated with integrable holomorphic quadratic differentials*, Preprint.
74. ———, *On boundary regularity of the Dirichlet problem for plane domains*, Preprint.
75. ———, *On the bottom of spectra of open Riemann surfaces*, in preparation.
76. T. Sugawa and M. Vuorinen, *in preparation.*
77. D. Sullivan, *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 327–351.
78. D. A. Trotsenko and J. Väisälä, *Upper sets and quasisymmetric maps*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **24** (1999), 465–488.
79. M. Tsuji, *On the capacity of general Cantor sets*, J. Math. Soc. Japan **5** (1953), 235–252.
80. ———, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, 1959.
81. P. Tukia and J. Väisälä, *Quasisymmetric embeddings of metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **5** (1980), 97–114.
82. J. Väisälä, M. Vuorinen, and H. Wallin, *Thick sets and quasisymmetric maps*, Nagoya Math. J. **135** (1994), 121–148.
83. M. Vuorinen, *On quasiregular mappings and domains with a complete conformal metric*, Math. Z. **194** (1987), 459–470.
84. ———, *Conformal geometry and quasiregular mappings*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
85. H. Wallin and P. Wingren, *Dimension and geometry of sets defined by polynomial inequalities*, J. Approx. Theory **69** (1992), 231–249.
86. S. Yamashita, *The derivative of a holomorphic function and estimates of the Poincaré density*, Kodai Math. J. **15** (1992), 102–121.
87. J.-H. Zheng, *On uniformly perfect boundary of stable domains in iteration of meromorphic functions* II, to appear in Proc. Math. Cambridge Phil. Soc.
88. ———, *Uniformly perfect sets and distortion of holomorphic functions*, to appear in Nagoya Math J.
89. ———, *On uniformly perfect boundary of stable domains in iteration of meromorphic functions*, Bull. London Math. Soc. **32** (2000), 439–446.