局所単葉函数族の線型構造について

須川 敏幸

広島大学 大学院理学研究科

1. Hornich の演算

以下の話は一般の単連結領域上でもある程度は展開できるが、ここでは簡単のために単位円板 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ の上で考えることにする。単位円板上の正則函数 f が局所的に単射（局所単葉）であるための必要十分条件は、$f'(z)\neq 0$ が全ての $z\in\mathbb{D}$ において成り立つことである。以下では、$f(0)=0, f'(0)=1$ と正規化された単位円板上の正則函数全体を $\mathcal{A}$ と記し、その局所単葉な部分族を $\mathcal{LU}$ と記すことにする。H. Hornich [6] は、（記号は異なるが）$\mathcal{LU}$ 上に次のような一見変わった演算を定義した。

$$f\oplus g(z)=\int_0^z f'(w)g'(w)dw,$$
$$\alpha\star f(z)=\int_0^z \bigl\{f'(w)\bigr\}^\alpha dw,$$

ただしここに $f,g\in\mathcal{LU},\alpha\in\mathbb{C}$ とする。Hornich 自身は実の α しか考えていなかったようだが、$\log f'$ の分枝を常に $\log f'(0)=0$ となるように選ぶことにしておけば、$(f')^\alpha=\exp(\alpha\log f')$ によって任意の複素数 α に対して $\alpha\star f$ が定義できることが分かる。そして簡単に確かめられるように、$\mathcal{LU}$ はこの演算に関して $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる。この講演では、$\mathcal{LU}$ 上のこの線型構造に着目して幾何学的函数論におけるいくつかの問題を考察することにしたい。

一見奇異に思えるこの演算であるが、山下氏 [14] が指摘したように次の前 Schwarz 微分

$$T_f(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

を通して考えると非常に自然に捉えられる。実際、対応 $f\mapsto T_f$ は $\mathcal{LU}$ から、単位円板上の正則函数全体からなる複素線型空間 $\mathcal{H}$ への全単射になっており、$T_{f\oplus g}=T_f+T_g$ および $T_{\alpha\star f}=\alpha T_f$ に注意すれば、この Hornich 演算は $\mathcal{H}$ の線型構造を T により $\mathcal{LU}$ に移植したものと思える。

2. ノルムと単葉性

幾何学的函数論において最も重要なクラスの一つは、言うまでもなく（正規化された）単葉函数の全体 $\mathcal{S}=\{f\in\mathcal{A}; f \text{ は単葉 }\}$ である。この集合を含む便利なクラスとして、一様局所単葉函数全体のなす集合 $\mathcal{B}$ が挙げられる。ここで単位円板上の正則函数 f が一様局所単葉であるとは、ある定数 $\rho>0$ が存在して、$\mathbb{D}$ 内の半径 ρ の任意の双曲円板（Poincaré

Date: September 7, 2002 函数論サマーセミナー@富士教育研究所.

円板）において f が単葉であることを意味する。簡単な考察から、実は f の一様局所単葉性は次のノルム

$$\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|T_f(z)|$$

の有限性によって特徴づけられることが分かる。従って $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{LU}; \|f\| < \infty\}$ である。このノルムにより $\mathcal{B}$ は（Hornich 演算に関して）複素 Banach 空間となり集合 $\mathcal{S}$ はその中で内点を持つ。実際、$\mathcal{S}$ の内部 $\mathcal{T}$ は普遍 Teichmüller 空間の“ poor man's model ”に一致することが知られている（[1] 参照)。

次の結果は、ノルムの大きさの持つ重要性をよく物語っている。

定理 1.

(i) (Becker [2], Becker-Pommerenke [3]) **$\|f\| \le 1$ ならば f は $\mathbb{D}$ において単葉である。また、この定数 1 は最良である。さらに $\|f\| \le k < 1$ ならば f は複素平面への K-擬等角拡張を持つ。ただしここで $K = (1+k)/(1-k)$ とする。**

(ii) (Osgood [11]) **f が $\mathbb{D}$ 上で単葉ならば $\|f\| \le 6$ である。また、この定数 6 は最良である。**

(iii) (cf. [8]) **$\|f\| < 2$ ならば f は $\mathbb{D}$ 上で有界である。また、この定数 2 は最良である。**

3. 単葉函数族の種々の部分族

単葉函数論において重要な函数の族は、凸函数族 $\mathcal{K}$ および星状函数族 $\mathcal{S}^*$ である。ここで、$f \in \mathcal{A}$ が凸 (convex) であるとは、f が単葉かつ像 $f(\mathbb{D})$ が $\mathbb{C}$ において凸であることとし、$f \in \mathcal{A}$ が星状 (starlike) であるとは、f が単葉かつ像 $f(\mathbb{D})$ が原点に関して星状であることとする。これらについて、次の特徴付けは良く知られている。例えば、[5] などを参照のこと。

定理 2. **$f \in \mathcal{A}$ が星状であるためには次が必要十分である：**

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

また、$f \in \mathcal{A}$ が凸であるためには次が必要十分である：

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

上の 2 条件の間には一見して類似性があることが分かるが、このことは次の Alexander 変換を導入することにより、より鮮明になる：

$$J[f](z) = \int_0^z \frac{f(w)}{w}dw = \int_0^1 f(tz)\frac{dt}{t}.$$

$F = J[f]$ とすれば、簡単な計算により

$$1 + \frac{z\,F''(z)}{F'(z)} = \frac{z\,f'(z)}{f(z)}$$

であることが分かるので、特にこのことから $f \in \mathcal{A}$ に対して

$$f \in \mathcal{S}^* \iff J[f] \in \mathcal{K}$$

であることが従う。なお、変換 J の逆変換は Ruscheweyh 微分と呼ばれるものの最も単純な形 $f(z) = z\,F'(z)$ で与えられることに注意しておく。

なお、これらの函数族に関連して近接凸函数の族 $\mathcal{C}$ も有用である。ここで $f \in \mathcal{A}$ が近接凸 (close-to-convex) であるとは、ある $g \in \mathcal{K}$ および定数 $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ があって

$$\mathrm{Re}\,\left(e^{i\gamma}\,\frac{f'(z)}{g'(x)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つことを言う。能代-Warschawski の定理により $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ であることに注意する。また、$f \in \mathcal{S}^*$ ならば、$g = J[f] \in \mathcal{K}, \gamma = 0$ に取れるので $f \in \mathcal{C}$ であることが分かる、すなわち $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{C}$ である。

このとき、空間 $\mathcal{LU}$（または $\mathcal{B}$）の Hornich 線型構造に関して次の興味深いことが知られている。

定理 3.

(i) (Cima-Pfaltzgraff [4]) 凸函数族 $\mathcal{K}$ は $\mathcal{B}$ 内の閉凸集合である。
(ii) (Kim-Merkes [9]) 近接凸函数族 $\mathcal{C}$ は $\mathcal{B}$ 内の凸集合である。

では、$\mathcal{S}^*$ に関してはどうであろうか？少なくとも、$\mathcal{S}^*$ 自身は凸集合でないことが分かっている（[7] 参照）。次のことはまだ証明されていないが、予想として挙げておこう。

予想 1. 星状函数族 $\mathcal{S}^*$ は原点 (恒等写像) に関して星状である。

4. 非線形積分作用素としての Hornich 演算

Hornich 演算のスカラー倍は、実は“ 非線形 ”積分作用素としての側面も持っている。Hornich の線型構造は、このような非線形作用素を調べる上でも有用である。以下では作用素らしく

$$I_\alpha[f](z) = \alpha \star f(z) = \int_0^z \left\{f'(w)\right\}^\alpha dw$$

と書くことにしよう。また、作用素 $J_\alpha = I_\alpha \circ J$ もしばしば有用である。

これら積分作用素と単葉性の関連が以前から研究されているが、まだあまりよく分かっているとは言えないのが現状である。今のところ知られている最良の一般的結果は次の通りである。

定理 4.

(i) (Pfaltzgraff [12]) $|\alpha| \le 1/4$ ならば $I_\alpha[\mathcal{S}] \subset \mathcal{S}$ が成り立つ。
(ii) (Royster [13]) $\alpha \neq 1$ が $|\alpha| > 1/3$ を満たすならば、ある $f \in \mathcal{S}$ で $I_\alpha[f]$ が単葉でないものが取れる。

Royster の結果から特に $\mathcal{S}$ が原点を中心に星状ではないことが分かる。$1/4 < |\alpha| \le 1/3$ なる α については、関係式 $I_\alpha[\mathcal{S}] \subset \mathcal{S}$ の成否に関してまだ何も分かっていないようである。

一方、種々の $\mathcal{S}$ の部分族に関しては様々な部分的結果が知られている。例えば、Merkes [10] は $|\alpha| \le 1/2$ に対して $I_\alpha[\mathcal{K}] \subset \mathcal{S}$ を証明した。同じ論文で彼は $|\alpha - 1| \le 1/2$ でも同じ結論が得られると予想したが、残念ながらこの予想は完全には正しくなかったようである。

定理 5 ([7]). **集合** $\{\alpha \in \mathbb{C}; I_\alpha[\mathcal{K}] \subset \mathcal{S}\}$ **は閉円板** $|\alpha| \le 1/2$ **と線分** $[1/2, 3/2]$ **の和集合である。**

References

1. K. Astala and F. W. Gehring, *Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmüller space*, J. Analyse Math. **46** (1986), 16–57.
2. J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 23–43.
3. J. Becker and Ch. Pommerenke, *Schlichtheitskriterien und Jordangebiete*, J. Reine Angew. Math. **354** (1984), 74–94.
4. J. A. Cima and J. A. Pfaltzgraff, *A Banach space of locally univalent functions*, Michigan Math. J. **17** (1970), 321–334.
5. P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, 1983.
6. H. Hornich, *Ein Banachraum analytischer Funktionen in Zusammenhang mit den schlichten Funktionen*, Monatsh. Math. **73** (1969), 36–45.
7. Y. C. Kim, S. Ponnusamy, and T. Sugawa, *Mapping properties of nonlinear integral operators and pre-Schwarzian derivatives*, http://www.cajpn.org/complex/pp02/0204.html.
8. Y. C. Kim and T. Sugawa, *Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk*, Rocky Mountain J. Math. **32** (2002), 179–200.
9. Y. J. Kim and E. P. Merkes, *On certain convex sets in the space of locally schlicht functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **196** (1974), 217–224.
10. E. P. Merkes, *Univalence of an integral transform*, Contemporary Math. **38** (1985), 113–119.
11. B. G. Osgood, *Some properties of f''/f' and the Poincaré metric*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 449–461.
12. J. A. Pfaltzgraff, *Univalence of the integral of $f'(z)^\lambda$*, Bull. London Math. Soc. **7** (1975), 254–256.
13. W. C. Royster, *On the univalence of a certain integral*, Michigan Math. J. **12** (1965), 385–387.
14. S. Yamashita, *Banach spaces of locally schlicht functions with the Hornich operations*, Manuscripta Math. **16** (1975), 261–275.

739-8526 東広島市鏡山 1-3-1 広島大学大学院理学研究科数学教室

E-mail address: `sugawa@math.sci.hiroshima-u.ac.jp`