平成15年度 数理解析特論B　（須川敏幸 担当）

レポート問題 (2004年1月29日出題)

以下のうち1問以上を選択してレポートせよ．提出場所：次回講義時間，または数学事務室，提出期限：2月9日.（なお，同内容のファイルを

`http://sugawa.cajpn.org/lectures.html`

にも置く予定である.）

[1] 定数 $0 < \alpha \leq 1$, $2 < p < \infty$ に対して，複素平面上で α-Hölder 連続かつ p 乗可積分な（超函数の意味での）偏導函数を持つ函数 f で $f(0) = 0$ を満たすもの全体を $B_{\alpha,p}$ とし，

$$\|f\|_{B_{\alpha,p}} = \sup_{z_1,z_2\in\mathbb{C};z_1\neq z_2} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha} + \|f_z\|_p + \|f_{\bar{z}}\|_p$$

とする.（ここに $\|\cdot\|_p$ は $\mathbb{C}$ 上の L^p ノルムとする.）この空間 $B_{\alpha,p}$ は上記のノルムに関して完備（すなわち $B_{\alpha,p}$ はバナッハ空間）であることを示せ.

[2] $f(z)$ を C^1 級の写像とする．極座標 $z = re^{i\theta}$ を用いて（すなわち偏導函数 f_r, f_θ を用いて）f のベルトラミ係数をできるだけ簡単に表現せよ.

[3] α を $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ を満たす複素数とし，写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(0) = 0$ かつ $z \neq 0$ に対しては

$$f(z) = \frac{z}{|z|} e^{\alpha \log |z|}$$

によって定める．f の Beltrami 係数を計算し，f が擬等角写像であることを確認せよ.