SOME INEQUALITIES FOR THE POINCARÉ METRIC OF PLANE DOMAINS

須川 敏幸　　広島大学大学院理学研究科

MATTI VUORINEN　　ヘルシンキ大学

この講演では平面領域の双曲計量および双曲距離の（主に下からの）効果的な評価法について述べ、いくつかその応用を紹介する。

(双曲的と呼ばれる) 境界が 2 点以上からなる平面領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ の双曲計量 (Poincaré 計量) を $\rho_\Omega(z)|dz|$ により表す。ただし、ここに双曲計量とは完備な等角的リーマン計量で Gauss 曲率が -4 であるもののことをいう。また、その測地線の長さから自然に定義される距離を双曲距離 (Poincaré 距離) と呼び、$d_\Omega(z_1, z_2)$ のように表す。このようなものは、解析的普遍被覆写像を用いて記述することができるが、そのような写像を具体的に書き表したり、数値的にせよ計算するのは特殊な場合を除き非常に困難である。従って、計量の密度や、距離を評価するということが実際的な問題となる。その際、重要な役割を果たすのが次の比較原理である。すなわち、Ω_0, Ω_1 を双曲的平面領域で $\Omega_0 \subset \Omega \subset \Omega_1$ を満たすものとするとき、

$$\rho_{\Omega_1}(z) \le \rho_\Omega(z) \le \rho_{\Omega_0}(z), \quad d_{\Omega_1}(z_1, z_2) \le d_\Omega(z_1, z_2) \le d_{\Omega_0}(z_1, z_2)$$

が $z, z_1, z_2 \in \Omega_0$ について成り立つ。従って与えられた Ω に対して計算しやすい上のような Ω_0, Ω_1 を見つければよい、ということになる。Ω_0 としてよく使われるのが円板や、円環であり、Ω_1 としては 2 点穴あき平面 $\mathbb{C}_{a,b} = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ が便利である。例えば $\lambda_{a,b} := \rho_{\mathbb{C}_{a,b}}$ の表示は、Agard [1] によりいくつか得られている。また、$\lambda = \lambda_{1,0}$ と置けば $|b-a|\lambda_{a,b}(z) = \lambda((z-a)/(b-a))$ であり、λ については $\lambda(-|z|) \le \lambda(z) \le \lambda(|z|)$ であることが知られおり、$\lambda(-x), x > 0,$ についてはかなり精密な評価も知られている。

本講演では、境界点 $a \in \partial\Omega$ を固定して得られる次のような境界の大きさを測る量

$$m_{\partial\Omega}(a, t) = \min\left\{\Big|\log|b-a| - t\Big|; b \in \partial\Omega\right\}$$

を $t \in \mathbb{R}$ について考察し、これを用いて双曲計量の具体的な評価を与える。ここで重要なことは、$m_{\partial\Omega}(a, t)$ が a を固定すれば t に関して 1-Lipschitz 連続になることである。また、$\partial\Omega$ の一様完全性は、$m_{\partial\Omega}(a, t)$ が $a \in \partial\Omega, t \in (0, \mathrm{diam}\partial\Omega)$ に関して一様に有界であることとして特徴づけられる。このような考察の応用として、最近の Gardiner-Lakic [2] による次の結果の直接的証明が得られる。

定理 1. 各点 $z \in \Omega$ に対して $\sigma_\Omega(z) = \sup\{\lambda_{a,b}(z); a, b \in \partial\Omega\}$ と定義する。すると $\sigma_\Omega(z) \le \rho_\Omega(z) \le C\sigma_\Omega(z)$ が、ある絶対定数 $C > 1$ について成立する。

この定理を満足する絶対定数のうち最小のものを C_1 と書けば、$C_0 \le C_1 \le 2C_0 + \pi/4 \approx 10.3246$ となることが証明から分かる。ただし、ここに $C_0 = \Gamma(1/4)^4/4\pi^2 \approx 4.37688$ とする。

さらに、このような考察を用いて双曲距離の下からの評価を与えることもできる。奇関数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$\varphi(t)=\log\left(\frac{\mathcal{K}(1/(1+e^{-t/2}))}{\mathcal{K}(1/(1+e^{t/2}))}\right)$$

によって定める。ただしここに $\mathcal{K}$ は第一種完全楕円積分、すなわち

$$\mathcal{K}(x)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x\,t^2)}},\quad 0<x<1,$$

とする。この関数について、$t>0$ において

$$\log\left(1+\frac{t}{2C_0}\right)\le\varphi(t)\le\log\left(1+\frac{t}{2\pi}\right)$$

が成り立つことが分かる。これを用いて次の定理が示される。

定理 2. **N を自然数または ∞ とし、$t_j,\ 1\le j<N$ を単調増加実数列、$t_0=-\infty, t_N=\infty$ とする。領域 $\Omega\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の補集合が各 j に対してある点 a_j で $|a_j|=e^{t_j}$ なるものを含むとする。任意の $|z_1|\le|z_2|$ を満たす 2 点 $z_1,z_2\in\Omega$ に対して、整数 $1\le k\le l<N$ を $(t_{k-1}+t_k)/2\le\log|z_1|\le(t_k+t_{k+1})/2$ かつ $(t_{l-1}+t_l)/2\le\log|z_2|\le(t_l+t_{l+1})/2$ を満たすように取れば、**

$$d_\Omega(z_1,z_2)\ge\frac{1}{2}\varphi\bigl(t_k-\log|z_1|\bigr)+\sum_{n=k+1}^{l}\varphi(t_n-t_{n-1})+\frac{1}{2}\varphi\bigl(\log|z_2|-t_l\bigr)$$

が成り立つ。逆に、$D=\mathbb{C}\setminus\{e^{t_j};0\le j<N\}$ とすれば、

$$\frac{d_D(-|z_1|,-|z_2|)}{C_1}\le\frac{1}{2}\varphi\bigl(t_k-\log|z_1|\bigr)+\sum_{n=k+1}^{l}\varphi(t_n-t_{n-1})+\frac{1}{2}\varphi\bigl(\log|z_2|-t_l\bigr)$$

が成り立つ。ここに C_1 は先の定理を満たす最小の絶対定数とする。

なお、$\varphi(t)/t$ は $t\ge0$ において単調減少、従って $\varphi(t)$ は劣加法的であると予想される。上記の定理を用いて、Littlewood 型の結果などが導かれる。

References

[1] Agard, S. Distortion theorems for quasiconformal mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math.*, **413** (1968), 1–12.

[2] Gardiner, F. P. and Lakic, N. Comparing Poincaré densities, *Ann. of Math.*, **154** (2001), 245–267.