GROWTH AND COEFFICIENT ESTIMATES FOR UNIFORMLY LOCALLY UNIVALENT FUNCTIONS ON THE UNIT DISK

須川 敏幸　　京都大学・理学部
AND
YONG CHAN KIM　　YEUNGNAM UNIVERSITY

単位円板上の正則函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ がある定数 $\rho>0$ に対して単位円板内の任意の半径 $\rho>0$ の双曲円板において単葉であるときに、一様局所単葉であると言う。これは f の前 Schwarz 微分 $T_f=f''/f'$ が双曲的に有界であること、すなわち、

$$\|T_f\|=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|T_f(z)|<\infty$$

が成り立つことと同値である [4]。(別の言い方をすれば $\log f'$ が Bloch 函数であるということである。) T_f は 1 次函数の後からの合成に関して不変なので以後では $f(0)=f'(0)-1=0$ と正規化された単位円板上の正則函数のみを考える。このような函数全体を $\mathcal{A}$ と表すことにし、その部分集合で上記のノルムが有限であるようなもの全体を $\mathcal{B}$ と表す。これは f と T_f を同一視することにより Banach 空間の構造を持つ。

この講演ではその部分集合 $\mathcal{B}(\lambda)=\{f\in\mathcal{A};\|T_f\|\le 2\lambda\}$ について考察する。以下は [3] の結果の一部である。

$\mathcal{T}_1$ を $\mathcal{A}$ の部分集合でリーマン球面全体に擬等角に拡張できるような函数全体とする。このような集合は $\mathcal{B}$ の開集合で非可算無限個の成分を持ち $\mathrm{Int}\mathcal{B}(1/2)\subset\mathcal{T}_1\subset\mathcal{B}(3)$ であることが知られている ([2], [5])。この集合は普遍 Teichmüller 空間の一つのモデルとしても重要である [1]。

まず $\mathcal{B}(\lambda)$ については次の函数が極値函数としての役割を果たす:

$$F_\lambda(z)=\int_0^z\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^\lambda dt.$$

これは $T_{F_\lambda}=2\lambda(1-z^2)^{-1}$ を満たす函数として特徴づけられ、パラメータについては次のことが言える。

補題 1.
1. F_λ **が有界** $\Leftrightarrow\ 0\le\lambda<1,$
2. F_λ **が単葉** $\Leftrightarrow\ 0\le\lambda\le 1.$

応用上、次の結果が重要である。(証明は非常に易しく、Bloch 函数の評価の variant と思えば知られた結果である。)

定理 2. $f\in\mathcal{B}(\lambda)$ **に対して次の不等式が成り立つ。**

$$F_\lambda'(-|z|)=\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^\lambda\le|f'(z)|\le\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^\lambda=F_\lambda'(|z|),$$

$$|f(z)| \le F_\lambda(|z|)$$

さらに f が単葉ならば

$$-F_\lambda(-|z|) \le |f(z)| \le F_\lambda(|z|).$$

が成立する。上記のどこかにおいて原点以外の 1 点で等号が成立すればそれは F_λ の回転に限る。

これより特に $\lambda < 1$ ならば f は有界で $\lambda > 1$ ならば $f(z) = O(1-|z|)^{1-\lambda}$ が成立する。

次に係数評価について述べる。$f \in \mathcal{B}(\lambda)$ を級数展開して $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ と表しておく。$na_n = O(n^\gamma)$ $(n \to \infty)$ が成り立つような定数 γ の下限を $\gamma(f)$ と表し、$f \in \mathcal{B}(\lambda)$ 全体にわたる $\gamma(f)$ の上限を $\gamma(\mathcal{B}(\lambda))$ で表すことにする。すると次の評価が成り立つ。

定理 3.

$$\lambda - 1 \le \gamma(\mathcal{B}(\lambda)) \le \frac{\sqrt{1+4\lambda^2}-1}{2}.$$

ここで

$$\frac{\lambda^2}{\lambda+1} < \frac{\sqrt{1+4\lambda^2}-1}{2} < \min\left\{\lambda^2, \frac{2\lambda^2}{2\lambda+1}\right\} \le \min\{\lambda^2, \lambda\}.$$

であることに注意しておく。

最後に Hardy 空間との関係について述べておく。

定理 4. **$f \in \mathcal{A}$ が単葉でかつ $\|T_f\| = 2\lambda$ を満たしているとする。**
$\lambda < 1$ ならば $f \in H^\infty$ である。
$\lambda > 1$ ならば $f \in H^p$ が任意の $0 < p < 1/(\lambda - 1)$ について成り立つ。
$\lambda = 1$ ならば $f \in BMOA$ である。

ここで $H^\infty \subset BMOA \subset \cap_{0<p<\infty} H^p$ が成り立つことに注意しておく。

References

[1] Astala, K. and Gehring, F. W. Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmüller space, *J. Analyse Math.*, **46** (1986), 16–57.

[2] Becker, J. and Pommerenke, C. Schlichtheitskriterien und Jordangebiete, *J. Reine Angew. Math.*, **354** (1984), 74–94.

[3] Kim, Y. C. and Sugawa, T. Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk, preprint (1998).

[4] Yamashita, S. Almost locally univalent functions, *Monatsh. Math.*, **81** (1976), 235–240.

[5] Zhuravlev, I. V. Model of the universal Teichmüller space, *Siberian Math. J.*, **27** (1986), 691–697.