

局所調和測度の評価およびその DIRICHLET 問題の境界正則性への応用

ESTIMATE OF LOCAL HARMONIC MEASURES WITH AN
APPLICATION TO BOUNDARY REGULARITY OF THE
DIRICHLET PROBLEM

須川 敏幸 京都大学・理学部
TOSHIYUKI SUGAWA KYOTO UNIVERSITY

ABSTRACT. この講演では、平面領域の各境界点において局所調和測度という量を定義し、その量の境界点における減衰の仕方によってその領域における Dirichlet 問題の解のその境界点での境界挙動が制御できることについて説明する。また、Green 函数の境界挙動に関する結果や、等角写像論への応用についても紹介する。

1. DIRICHLET 問題と正則性

Ω をリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の部分領域 (または、より一般に開集合) とする。自明な場合を排除するために以下では常に $\#\partial\Omega \geq 2$ と仮定する。このような領域は以下では単に平面領域と呼ばれる (従って無限遠点を含んでもよい)。また境界 $\partial\Omega$ は常にリーマン球面で考えるものとする。なお、以下では $B(a, r)$ は中心を a として半径を r とする閉円板とする。 $B^\circ(a, r)$ はその内部、すなわち開円板を表す。

まず最初に Dirichlet 問題の Perron-Wiener-Brelot の意味での解 (以下、これを PWB 解と呼ぶ) について復習しておく。これについては Helms の教科書 [5] に非常に良い解説があるので、証明やより詳しい性質などについてはそちらを参照して頂きたい。

函数 $s : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ が劣調和であるとは、次の条件を満たすことである :

1. s は恒等的に $-\infty$ ではない、
2. s は D において上半連続、すなわち各 $a \in \mathbb{R}$ に対して集合 $\{z \in \Omega; s(z) < a\}$ は開である、
3. Ω に含まれる任意の閉 Jordan 領域 Δ とその近傍で調和な函数 u に対して

$$s \leq u \quad \text{on } \partial\Delta \implies s \leq u \quad \text{on } \Delta$$

が成り立つ。

劣調和性は局所的な性質であることが知られている。また函数 $s : \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]$ が優調和であるとは $-s$ が劣調和であるこという。

次に $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の函数として次の性質を満たす Ω 上の上に有界な劣調和函数 s の族を $\mathcal{P}(\varphi)$ と書く (これはしばしば Perron 族と呼ばれる) : 各 $\zeta \in \partial\Omega$ に対して

$$\bar{s}(\zeta) := \limsup_{z \rightarrow \zeta \text{ in } \Omega} s(z) \leq \varphi(\zeta)$$

が成り立つ。また、

$$\overline{\mathcal{P}}(\varphi) = \{s : \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]; -s \in \mathcal{P}(-\varphi)\}$$

Date: 金沢大学工学部秀峰会館, 16 July, 1999.

と定めておく。同様に $\underline{s} = -\overline{(-s)}$ と定義する。劣調和関数に関する通常の最大値の原理から容易に分かるように任意の $u \in \mathcal{P}(\varphi)$ および $v \in \overline{\mathcal{P}}(\varphi)$ に対して $u \leq v$ が D 上で成り立つ。

Perron の原理により $\mathcal{P}(\varphi) \neq \emptyset$ であるような函数 φ に対しては $u(z) = \sup\{s(z); s \in \mathcal{P}(\varphi)\}$ は Ω 上で調和になることが分かる。これを φ に対する (Ω における Dirichlet 問題の) 下解と呼び $\underline{H}^\Omega(\varphi)$ と書くことにする。 $\mathcal{P}(\varphi) = \emptyset$ である場合は形式的に $\underline{H}^\Omega(\varphi) = -\infty$ と定めておく。同様に上解 $\overline{H}^\Omega(\varphi)$ も定める。すなわち $\overline{H}^\Omega(\varphi) = -\underline{H}^\Omega(-\varphi)$ とする。上の注意により、常に $\underline{H}^\Omega(\varphi) \leq \overline{H}^\Omega(\varphi)$ である。もしこの等号が成り立つとき、 φ は Ω における Dirichlet 問題に関して可解であるといい、その共通の調和函数を $H^\Omega(\varphi)$ と書き、これを境界値 φ に対する Dirichlet 問題の PWB 解と呼ぶ。

E を境界 $\partial\Omega$ の Borel 集合として、その定義函数 1_E は Ω における Dirichlet 問題に関して (少なくとも Ω が有界である場合には) 可解であることが知られている [5, Theorem 8.13]。その PWB 解を E の Ω に関する調和測度と呼び、しばしば記号 $\omega(\cdot, E, \Omega)$ で表す。直観的には $\omega(z, E, \Omega)$ は点 z から見た Ω の境界に対する E の占める割合を表している。従って、ある意味で E の大きさを測ることになっている。(「測度」という言葉は、対応 $\varphi \mapsto H^\Omega(\varphi)(z)$ が空間 $C^0(\partial\Omega)$ 上の正值かつ 1 を 1 に写す有界線型汎函数であることから、これが Riesz の表現定理から確率測度とみなせることに由来しているが、この H^Ω が実際に $C^0(\partial\Omega)$ 上の函数となるかどうかはさらに議論を要するので、ここではこれ以上立ち入らない。少なくとも Ω が有界である場合は Wiener の定理 [5, Theorem 8.11] から任意の連続な境界函数が可解であることが知られている。)

さらに任意の有限な Ω の境界点 a および定数 $r > 0$ に対して $\partial B(a, r) \cap \Omega$ の開集合 $B^\circ(a, r) \cap \Omega$ に関する調和測度を $\omega_{a,r,\Omega}$ と書き、ここではこれを Ω の $B(a, r)$ における局所調和測度と呼ぶことにする。(無限遠点に対する局所調和測度についても同様に定義されるが、以下では考えないことにする。) 文脈によって Ω が何であるかはっきり分かる場合には、単に $\omega_{a,r}$ と記述することにする。この量もまた $\partial\Omega$ における a の近傍の大きさを測っていることになっている。例えば、上の古典的な調和測度 $\omega(\cdot, B(a, r) \cap \partial\Omega, \Omega)$ との比較では (Carleman の領域拡張に関する原理から) 次のことが成立することが容易に分かる：

$$1 - \omega_{a,r,\Omega} = \omega(\cdot, B(a, r) \cap \partial\Omega, B^\circ(a, r) \cap \Omega) \leq \omega(\cdot, B(a, r) \cap \partial\Omega, \Omega).$$

この量を考える利点は古典的な調和測度は Ω そのものに依存している (大域的な) のに対して、局所調和測度は $\Omega \cap B(a, r)$ にしか依存していない点である。従って、次の単調性補題を用いて様々な評価が可能になる (2 節参照)。

補題 1.1. $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ かつ $a \in \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega}$ とすると、 $B^\circ(a, r) \cap \Omega$ において $\omega_{a,r,\Omega} \leq \omega_{a,r,\tilde{\Omega}}$ が成り立つ。

一般には φ が Ω において可解であっても、その PWB 解が境界まで連続になっているかどうかは分からない。(たとえば、 $\underline{H}^\Omega(\varphi)$ 自身が $\mathcal{P}(\varphi)$ に属するとは一般には言えない。) それをある意味で保証するのが次の正則性の概念である。すなわち、 $a \in \partial\Omega$ において連続であるような $\partial\Omega$ 上の任意の有界な函数 φ に対して、その Ω における下解 \underline{u} および上解 \bar{u} が

$$\varphi(a) = \lim_{z \rightarrow a} \underline{u}(z) = \lim_{z \rightarrow a} \bar{u}(z)$$

を満たす時、この境界点 a は D における Dirichlet 問題に関して正則であると呼ばれる。

正則であるかどうかは実は局所的な性質で、バリアの存在ということによって特徴づけられることがよく知られている。ここで境界点 a におけるバリアとは、 a のある開近傍 V に対して $V \cap \Omega$ 上で定義された函数 β で次の性質を満たすものをいう：

- (a) β は $V \cap \Omega$ において正値優調和、
- (b) $\lim_{z \rightarrow a \text{ in } V \cap \Omega} \beta(z) = 0$,
- (c) a の任意の近傍 W に対して $\inf\{\beta(z); z \in V \cap \Omega \setminus W\} > 0$.

ここで Ω を領域として、 $a \in \partial\Omega \setminus \{\infty\}$, $0 < r < \text{diam } \partial\Omega$ とすれば $\partial B(a, r) \cap \Omega$ は $B^\circ(a, r) \cap \Omega$ の境界の空でない開集合となるので、局所調和測度 $\omega_{a,r}$ は上の (a) および (b) を自動的に満足する。これが a におけるバリアとなるためには (c) が成り立つかどうかだけが問題である。従って次の特徴付けを得る。

命題 1.2. 平面領域 Ω およびその有限境界点 a に対して次は同値である。

1. 境界点 a は Ω の Dirichlet 問題に関して正則、
2. 点 a におけるバリアが存在する、
3. 十分小さい $r > 0$ に対して局所調和測度 $\omega_{a,r,\Omega}$ が

$$\lim_{z \rightarrow a \text{ in } \Omega} \omega_{a,r,\Omega}(z) = 0$$

を満たす。

従って、この特殊な形のバリア $\omega_{a,r,\Omega}$ の減衰のオーダーがもっと詳しく分かれば境界の正則性がより強い形と言えるであろうと期待される。例えば、有限境界点 a が指数 α ($0 < \alpha \leq 1$) の Hölder 正則性を持つとは、任意の有界な境界函数 φ で性質

$$\varphi(\zeta) = \varphi(a) + O(|\zeta - a|^\alpha) \quad (\zeta \rightarrow a \text{ in } \partial\Omega)$$

を満たすものに対して、 u をその Ω における上解または下解とするとき

$$u(z) = \varphi(a) + O(|z - a|^\alpha) \quad (z \rightarrow a \text{ in } \Omega)$$

が成り立つことをいう。

また、 Ω が有限境界点 a において指数 α の局所調和函数減衰性あるいはここでは省略して LHMD 性 (Local Harmonic Measure Decay property) を持つとは、ある定数 $C \geq 1, r_0 > 0$ が存在して

$$(1.1) \quad \omega_{a,r,\Omega}(z) \leq C \left(\frac{|z - a|}{r} \right)^\alpha, \quad z \in B^\circ(a, r) \cap \Omega, \quad 0 < r < r_0$$

が成り立つことをいう。特に、 a はこの時正則点になっている。また、 Ω が指数 α の一様 LHMD 性を持つとは、各有限境界点 a において指数 α の LHMD 性を持ち、しかも式(1.1)を成り立たせる定数 C, r_0 が点 a によらず一定に取れる時にいう。

定理 1.3 (主定理). 平面領域 Ω が境界点 a において指数 α の LHMD 性を持つならばその点は任意の $\gamma < \alpha$ に対して指数 γ の Hölder 正則性を持つ。より詳しくは、定数 M, N に対して $|\varphi| \leq M$ かつ $|\varphi(\zeta)| \leq N|\zeta - a|^\gamma$ を満たす函数 $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ に対して u を D における上解または下解とすれば

$$|u(z)| \leq AC \left(\frac{M}{r_0^\gamma} + \frac{N}{\alpha - \gamma} \right) |z - a|^\gamma, \quad z \in \Omega$$

が成り立つ。ただし、ここに C, r_0 は式(1.1)に現れる定数で A は絶対定数である。さらに、 φ が $B(a, r_1) \cap \partial\Omega$ において 0 であるならば、

$$|u(z)| \leq CM \left(\frac{|z - a|}{r_2} \right)^\alpha, \quad z \in \Omega$$

を得る。ただし、ここに $r_2 = \min\{r_0, r_1\}$ とする。

この定理の主張において、 $\gamma = \alpha$ には取ることには一般には出来ない。それについては次の節で具体例を通して述べることにしたい。

E を \mathbb{C} の部分集合として指数 α の Lipschitz 空間 $\Lambda_\alpha(E)$ を E 上の実数値関数 f で次のノルムが有限であるようなもの全体からなる実 Banach 空間とする：

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha(E)} = \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x, y \in E, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

一般に $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ の場合は $\Lambda_\alpha(E) := \Lambda_\alpha(E \setminus \{\infty\})$ と定義しておく。(従って、無限遠点における値は一般には定義されない。) すると定理 1.3 から次の大域的結果を得る。

定理 1.4. 平面領域 Ω が指数 α の一様 LHMD 性を持つならば、任意の $\gamma < \alpha$ に対して調和拡張写像 H^Ω は $\Lambda_\gamma(\partial\Omega)$ から $\Lambda_\gamma(\Omega)$ への有界線型作用素となり、その作用素ノルムは

$$\|H^\Omega\|_{\Lambda_\gamma} \leq AC \left(r_0^{-\gamma} + \frac{1}{\alpha - \gamma} \right)$$

で評価される。ただしここに C, r_0 は式(1.1)における定数であり A はある絶対定数である。

また、定理 1.3 の後半の主張からは、次の Green 関数についての結果を得る。

定理 1.5. 境界が有界であるような平面領域 Ω がある指数 α の一様 LHMD 性を持つならばその Green 関数は境界の近傍で指数 α の Hölder 連続性を持つ。

Hausdorff 次元が α より小さいコンパクト集合は指数 α を持つ Hölder 連続な調和関数に関して除去可能であるという Carleson の定理 [4] から、特に上記のような領域の境界は Hausdorff 次元が α 以上であることが分かる。もちろん、この主張は境界 $\partial\Omega$ が連続体を含まない、すなわち全不連結である場合でないという意味がない。全不連結でこのような一様 LHMD 性を持つような集合が存在するのか？それについては次の章で明らかにする。

2. LHMD 性の特徴付け及びその十分条件

この節ではまず LHMD 性の特徴付けについて述べた後、どのような条件が与えられた指数の (一様) LHMD 性を導くかを具体的に見ていく。

リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の 2 点以上からなるコンパクト集合 E が一様完全 (uniformly perfect) であるとは、ある定数 M が存在して E を分離する任意の円環 $A = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - a| < r_2\}$ について $\log r_2/r_1 \leq M$ が成り立つことをいう。ここで、二重連結領域 A が E を分離するとは、 C_1, C_2 を $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ の二つの連結成分とするととき、

$$E \cap A = \emptyset, E \cap C_1 \neq \emptyset, E \cap C_2 \neq \emptyset$$

が成り立つことをいう。この定義で $A, \log r_2/r_1$ をより一般の二重連結領域およびその modulus で置き換えても構わない。この方が評価は難しくなるが、等角不変性などは逆に見やすくなる。例えば、一様完全集合の (リーマン球面の) 擬等角自己同相写像による像はやはり一様完全であることなどが分かる。一様完全集合のその他の同値な定義については例えば [7] 及びその参考文献を参照されたい。特に、この講演の文脈で最も重要な特徴付けは次のものである：ある定数 $c > 0$ が存在して任意の $a \in E \setminus \{\infty\}$ および $0 < r < \text{diam } E$ について

$$\text{Cap}(B(a, r) \cap E) \geq cr$$

が成り立つ。ここで Cap は対数容量を表す。

次の結果が LHMD 性の特徴付けを与える。本質的には Ancona [1] によるものと思われるが、Ancona が考えていた条件は彼が“ uniformly Δ -regular ”と呼んでいた概念で、ある定数 $\varepsilon > 0$ が存在して任意の有限境界点 a および $0 < r < \text{diam } \partial\Omega$ に対して

$$\omega_{a,r,\Omega}(z) \leq 1 - \varepsilon, \quad z \in \partial B(a, r/2) \cap \Omega$$

が成り立つ、というものであった。これは少し考えると分かるように指数 $-\log(1 - \varepsilon)/\log 2$ の一様 LHMD 性を導くことが分かり、逆に任意の指数の一様 LHMD 性がこの Ancona の条件を ($r/2$ をもっと少ない値にする必要はあるかもしれないが) 包含することが容易に分かる。(ついでに言えば、Ancona は実次元が 3 以上の場合にしか証明を与えていないが、平面でも同様に成り立つ。ただ、Newton ポテンシャルを考える代わりに対数ポテンシャルを考える必要性があるために、証明は少し変わってくる。)

定理 2.1. 平面開集合 Ω が一様 LHMD 性を持つための必要十分条件は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ が一様完全であることである。

より具体的な指数についての評価も与えることが出来るが、詳しくは [8] を参照されたい。この結果から、一様 LHMD 性は擬等角不変であることも分かる。また、次数 2 以上の有理函数、非初等的有限生成 Klein 群の極限集合、自己相似 fractal 集合など、一様完全であることが知られているので、例えば全不連結な例も多数みつけることになる。

この定理では、残念ながら LHMD 性の指数の評価についてはそれほど多くのことが望めない。そこで、実際に α を与えたときに、どのような領域がその指数の LHMD 性を持つか、という問題についてある程度の解答を与えていくことにしよう。まず最初は $\alpha = 1$ に取れる場合である。

補題 2.2. Ω を平面領域として、 a をその有限境界点とする。もし半径 ρ の閉円板 B で $B \cap \Omega = \text{かつ } a \in \partial B$ なるものが存在すれば、局所調和測度について

$$(2.1) \quad \omega_{a,r,\Omega}(z) \leq \frac{\arcsin \left(\sqrt{\frac{1 - (r/2\rho)^2}{1 + (|z-a|/r)^2 + |z-a|/\rho}} \cdot \frac{|z-a|}{r} \right)}{\arcsin \sqrt{1 - (r/2\rho)^2}} \leq 2 \frac{|z-a|}{r}$$

が任意の $0 < r < 2\rho$ および $z \in B^\circ(a, r) \cap \Omega$ について成立する。

証明. $a = 0$, $r = 1$ かつ $B = B(\rho, \rho)$ として一般性を失わない。(従ってこの場合、 $1 < 2\rho$ でなければならない。) $\tilde{\Omega} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$ とすれば、 $\zeta_0 = e^{i\varphi}$ を単位円周と ∂B の共通点で虚部が正であるものとして、

$$\tilde{\omega}(z) := \omega_{a,r,\tilde{\Omega}}(z) = \frac{1}{\varphi} \arg \left(\frac{1 - \zeta_0 z}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \right) = \frac{1}{\varphi} \left\{ 2\varphi - \arg \left(\frac{\zeta_0 - z}{\bar{\zeta}_0 - z} \right) \right\}$$

であることが直接計算により分かる。従って特に $|z| = t < 1$ とすれば $\tilde{\omega}(z) \leq \tilde{\omega}(-t)$ であり、さらに正弦定理から $\theta = \varphi - \arg(\zeta_0 + t)$ とすれば

$$\frac{t}{\sin \theta} = \frac{|\zeta_0 + t|}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{1 + t^2 + t/\rho}}{\sin \varphi} \geq \frac{1}{\sin \varphi}.$$

を得るので、このことから

$$\tilde{\omega}(-|z|) = \frac{2\theta}{\varphi} = \frac{2}{\varphi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{1 - 1/4\rho^2}{1 + |z|^2 + |z|/\rho}} |z| \right) \leq \frac{2}{\varphi} \arcsin(|z| \sin \varphi) \leq 2|z|$$

を得る。最後に $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ に注意して補題 1.1 を適用すれば結論を得る。 \square

ある正定数 ρ に対して領域 Ω の有限境界点 a が半径 ρ の閉円板 B で $B \cap \Omega = \emptyset$ かつ $a \in \partial B$ なるものを持つ時、この領域は一様外部円条件を満たすという。上の補題と定理 1.4 とを合わせて直ちに次の結論を得る。

定理 2.3. 平面領域 Ω が一様外部円条件を満たすならば、 Ω は指数 1 の一様 LHMD 性を持つ。

例えば、凸領域については任意の ρ に対して一様外部円条件が成り立つ。特に単位円板はこの定理から指数 1 の一様 LHMD 性を持つことが分かる。一方、単位円周上の Lipschitz 連続函数の Dirichlet 解は一般には Lipschitz 連続にはならない。例えば次の例を考えてみればよいだろう。

単位円周上の函数 $\varphi(\zeta) = |\operatorname{Im} \zeta|$ を考えてみる。Poisson 積分を考えれば分かるように、この函数を境界値に持つ単位円板内の調和函数 u の実軸に制限したものは

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1-2x \cos t + x^2} |\sin t| dt = \frac{1-x^2}{\pi x} \log \frac{1+x}{1-x}$$

と表示される。従って特に単位円板内で Lipschitz 連続ではない。任意の $\alpha \in [1/2, 1)$ についても、この例を右半平面に写しておいてから等角写像 $z^{1/\alpha}$ を考えることによって定理 2.5 が sharp であることを示す例が作れる。従って定理 1.4 において一般には $\gamma = \alpha$ に出来ないことが分かる。

上の外部円(球)条件は(一般の次元において) Poincaré が正則性が成立するための十分条件として導入したものである。同様に正則性のための十分条件としてよく知られている外部錐条件も良い評価を与える。ここでは、さらにそれを一般化した条件を考えよう。

平面領域 Ω とその有限境界点 a に対して次の量を考える。

$$L_\Omega(a, r) = \begin{cases} -\infty & \partial B(a, r) \subset \Omega \text{ の時、} \\ |\partial B(a, r) \setminus \Omega|/r & \text{そうでない時、} \end{cases}$$

ただし、ここで $|\cdot|$ は円周上の 1 次元 Lebesgue 測度を表すものとする。従って特に $0 \leq L_\Omega(a, r) \leq 2\pi$ または $L_\Omega(a, r) = -\infty$ である。

定義から明らかなように、例えば境界点 a を頂点とする開き角 $\beta \geq 0$ で半径 ρ のくさび形が領域の外部に取れれば $L_\Omega(a, r) \geq \beta$ が $0 < r < \rho$ について成り立つ。

補題 2.4. $\beta \in [0, \pi]$ とする。平面領域 Ω およびその有限境界点 a に対して $L_\Omega(a, r) \geq \beta$ が $0 < r < \rho$ に対して成り立つならば

$$(2.2) \quad \omega_{a,r,\Omega}(z) \leq \frac{4}{\pi} \arctan \left(\left(\frac{|z-a|}{r} \right)^{\frac{\pi}{2\pi-\beta}} \right) \leq \frac{4}{\pi} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^{\frac{\pi}{2\pi-\beta}}$$

が $0 < r < \rho$ および $z \in B^\circ(a, r) \cap \Omega$ に対して成り立つ。従って、点 a において Ω は指数 $\pi/(2\pi - \beta)$ の LHMD 性を持つ。

Remark. 例えば、境界点 a が $\partial\Omega$ に含まれるある連続体に含まれるならば、 $\beta = 0$ としてこの補題の仮定を満足する。このような場合は古典的には正則であることは知られていたわけだが、さらに指数 $1/2$ の Hölder 正則性が成り立つことまでこの補題及び主定理から分かる。

証明. やはり $a = 0$, $r = 1$ と仮定して一般性を失わない。 Ω^* を Ω の円対称化とする。すなわち $\Omega^* = \{te^{i\theta}; 0 < t < \infty, 2|\theta| < 2\pi - L_\Omega(a, r)\}$. すると、A. Baernstein II [2] による深い結果から $\omega_{0,1,\Omega}(z) \leq \omega_{0,1,\Omega^*}(|z|)$ が成り立つことが分かる。一方、仮定から $\tilde{\Omega} = \{te^{i\theta}; 0 < t, 2|\theta| < 2\pi - \beta\}$ として $B^\circ(0, 1) \cap \Omega^* \subset B^\circ(0, 1) \cap \tilde{\Omega}$ が成り立つから、再び単調性補題 (補題 1.1) から

$$\omega_{0,1,\Omega^*}(|z|) \leq \omega_{0,1,\tilde{\Omega}}(|z|) = \frac{4}{\pi} \arctan(|z|^{\pi/(2\pi-\beta)})$$

を得る。 □

定数 $\beta \in [0, \pi]$ に対して領域 Ω が開き角 β の一様一般外部錐条件を満たすとは、ある定数 $\rho > 0$ が存在して Ω の任意の有限境界点 a に対して $L_\Omega(a, r) \geq \beta$ が任意の $0 < r < \rho$ に対して成り立つこととする。例えば、ある正定数 ρ に対して $\partial\Omega$ の任意の連結成分の直径が ρ 以上であるならば、 Ω は開き角 0 の一様一般外部錐条件を満たすことになる。特に Ω が有限連結領域で孤立した境界点を持たないならば、この条件は満たされる。上記の補題より、このような領域については次のことが成り立つことが分かる。

定理 2.5. $0 \leq \beta \leq \pi$ として、平面領域 Ω が開き角 β の一様一般外部錐条件を満たすならば、 Ω は指数 $\pi/(2\pi - \beta)$ の一様 LHMD 性を持つ。

3. 定理 1.3, 1.4, 1.5 の証明

まず最初に定理 1.3 の前半の主張の証明から始める。以下の証明は本質的には相川弘明氏によって改良されたものである。

与えられた φ に対して u は上解としよう。この時

$$u(z) \leq AC \left(\frac{M}{r_0^\gamma} + \frac{N}{\alpha - \gamma} \right) |z - a|^\gamma$$

を示せば良い。(同様にして下解 v については $-v$ がこの右辺で上から押さえられることが分かり、 $v \leq u$ に注意すればどちらに対しても定理の主張の不等式が成り立つことが示される。) 以下、 $z \in \Omega$ を固定しておく。

[$|z - a| \leq r_0$ の場合]

$j = 0, 1, \dots$ に対して $\delta_j = 2^j |z - a|$ と定める。 K を $\delta_K > r_0$ となる最小の自然数とする。すると取り方から

$$(3.1) \quad 2^{-K} < |z - a|/r_0$$

である。そこで $\varphi_j = \varphi \cdot 1_{B(a, \delta_j) \setminus B(a, \delta_{j-1})}$ ($j = 1, 2, \dots, K-1$) および $\varphi_0 = \varphi \cdot 1_{B(a, \delta_0)}$, $\varphi_K = \varphi \cdot 1_{\Omega \setminus B(a, \delta_{K-1})}$ と定める。すると作り方から $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_K$ である。 $u_j = \overline{H}^\Omega(\varphi_j)$ とすれば、上解の構成の仕方から分かるように $u \leq u_0 + u_1 + \dots + u_K$ である。

さて、構成の仕方から各 $j = 0, 1, \dots, K-1$ に対しては $\varphi_j \leq N\delta_j^\gamma$ であるから、 $u_j \leq N\delta_j^\gamma$ が成り立つ。また、同様に $u_K \leq M$ も言える。

次に $B(a, \delta_{j-1}) \cap \partial\Omega$ において $\varphi_j = 0$ であるという性質を使う。まず Kellogg の定理により非正則点は高々容量 0 であるから、そのような点を除いて $\bar{u}_j = 0$ が $B(a, \delta_{j-1}) \cap \partial\Omega$ 上で成り立つ。よって一般化された調和函数の最大値の原理により、 $u_j \leq N\delta_j^\gamma \omega_{a, \delta_{j-1}}$ が $B^\circ(a, \delta_{j-1}) \cap \Omega$ において成り立つ ($j = 1, \dots, K-1$)。従って式(1.1)を用いれば $j = 1, \dots, K-1$ に対して

$$u_j(z) \leq CN\delta_j^\gamma \left(\frac{|z - a|}{\delta_{j-1}} \right)^\alpha = 2^\alpha CN 2^{(\gamma-\alpha)j} |z - a|^\gamma$$

を得る。 $j = 0$ に対しては $u_0(z) \leq N\delta_0^\gamma = N|z - a|^\gamma \leq 2^\alpha CN|z - a|^\alpha$ であるから、上の不等式は $j = 0$ についても成り立っていることが分かる。

最後に $j = K$ についてはやはり上と同様の評価と不等式(3.1) から

$$u_K(z) \leq CM \left(\frac{|z - a|}{\delta_{K-1}} \right)^\alpha = 2^\alpha CM 2^{-\alpha K} < 2^\alpha CM \left(\frac{|z - a|}{r_0} \right)^\alpha \leq 2^\alpha CM \left(\frac{|z - a|}{r_0} \right)^\gamma$$

を得る。これらを足し合わせることにより

$$u(z) \leq u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_K(z) \leq 2^\alpha C \left(\frac{M}{r_0^\gamma} + \frac{N}{1 - 2^{\gamma-\alpha}} \right) |z - a|^\gamma$$

が得られる。所期の形を得るには、あとは $1 - 2^{\gamma-\alpha} \geq (\gamma - \alpha)/2$ に注意すればよいだけである。

[[$|z - a| > r_0$ の場合]

この場合は $u(z) \leq M \leq M(|z - a|/r_0)^\gamma$ から容易に所期の不等式を得る。

以上により定理 1.3 の前半の主張が示された。

さて、次に定理 1.4 を示す。これを示すには次の補題に注意すればよい。証明は Harnack の不等式を使うという初等的なもので省略する。詳しくは [8] を参照して頂きたい。 $\delta_\Omega(z) = \text{dist}(z, \partial\Omega)$ とする。ここに dist は Euclid 距離に関する距離を表す。

補題 3.1. $\alpha \in (0, 1]$ とする。もし評価式

$$|H_\varphi(z) - \varphi(a)| \leq C \|\varphi\|_{\Lambda_\alpha(\partial\Omega)} \delta_\Omega(z)^\alpha$$

が任意の $\varphi \in \Lambda_\alpha(\partial\Omega)$ 及び $|z - a| = \delta_\Omega(z)$ となる $z \in \Omega$, $a \in \partial\Omega$ に対して成り立つならば、 $\|H^\Omega(\varphi)\|_{\Lambda_\alpha(\Omega)} \leq 16C \|\varphi\|_{\Lambda_\alpha(\partial\Omega)}$ が任意の $\varphi \in \Lambda_\alpha(\partial\Omega)$ に対して成立する。

定理 1.3 の後半の主張は前半より遙かに易しい。 u を φ に対する上解とする。すると最大値原理から $u \leq M\omega_{a,r_2}$ であることが分かる。従ってこれに(1.1)を適用するだけでよい。

これで定理 1.3 が完全に示された。後半の主張から定理 1.5 を導くのも先の議論を繰り返せばよい。より具体的には次の結果が成り立つ。

補題 3.2. G を z_0 に極を持つ Ω の Green 函数とする。 $0 < r_0 < \delta_\Omega(z_0)$ に取り $\Omega_0 = \{z \in \Omega; \delta_\Omega(z) < r_0\}$ と定める。 $\alpha \in (0, 1]$ とすると、次の条件は同値である。

(i) ある定数 C_1 が存在して任意の $z, w \in \Omega_0$ に対して

$$|G(z) - G(w)| \leq C_1 |z - w|^\alpha$$

が成り立つ。

(ii) ある定数 C_2 が存在して任意の $z \in \Omega_0$ に対して

$$G(z) \leq C_2 \delta_\Omega(z)^\alpha$$

が成り立つ。

しかも、 C_1, C_2 を上記を満たすような最小の定数とすれば $C_2 \leq C_1 \leq 2^{1+\alpha} C_2$ の関係が成り立つ。

4. 等角写像論への応用

この節では領域 Ω は \mathbb{C} 内の有界な有限連結領域で各境界成分が連続体であるようなもののみを考えるものとする。 Ω の連結度を m とすると、Riemann の写像定理を何度も使うことによって Ω を m 個の互いに交わらない解析曲線で囲まれた領域 Ω_0 に等角写像によって写すことができる。(必要なら、さらに Koebe の定理によって m 個の交わらない円周で囲まれた領域に写像することもできる。) その逆写像を $f : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ とする。

$\lambda_\Omega(z)|dz|$ を Ω の (曲率 -4 の) 双曲計量とする。 $\delta_\Omega(z) = \text{dist}(z, \partial\Omega)$ とすれば、良く知られているように (例えば [3] を参照のこと) ある定数 $c > 0$ が存在して Ω 上で

$$c \leq \delta_\Omega(z)\lambda_\Omega(z) \leq 1$$

が成り立つ。従って特に $\lambda_\Omega(z)$ と $\delta_\Omega(z)^{-1}$ とは比較可能である。

さてここで $w \in \Omega$ を固定して $f^{-1}(w) = w_0$ とおく。 Ω および Ω_0 の Green 関数で w, w_0 をそれぞれ極に持つものをそれぞれ G, G_0 と書くことにする。すると、双曲距離および Green 関数の等角不変性から $z \in \Omega_0$ に対して

$$\lambda_\Omega(f(z))|f'(z)| = \lambda_{\Omega_0}(z), \quad G(f(z)) = G_0(z)$$

という関係式を得る。Green 関数 G が Ω の境界の近傍で指数 α の Hölder 連続性を持つための必要十分条件は補題 3.2 から、境界の近傍において $G(z) \leq \text{const} \cdot \delta_\Omega(z)^\alpha$ が成り立つことであった。従ってこれを Ω_0 の言葉で書き直すと

$$G_0(z) = G(f(z)) \leq \text{const} \cdot \lambda_\Omega(f(z))^{-\alpha} = \text{const} \cdot (|f'(z)|/\lambda_{\Omega_0}(z))^\alpha$$

となる。Schwarz の鏡像原理から容易に分かるように $G_0(z) \approx \delta_{\Omega_0}(z) \approx \lambda_{\Omega_0}(z)^{-1}$ であるから、このことから次の判定条件を得る。

命題 4.1. G が境界の近傍で指数 α の Hölder 連続性を持つための必要十分条件は

$$(4.1) \quad \frac{1}{|f'(z)|} \leq m \lambda_{\Omega_0}(z)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

が Ω_0 上で成り立つような正定数 m が存在することである。

さらにこの判定条件と定理 2.5 を組み合わせて次の結論を得る。

補題 4.2. $f : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ を上記のものとする。 Ω が開き角 $\beta \in [0, \pi]$ の一様一般外部錐条件を満たすならば、ある定数 m が存在して

$$\frac{1}{|f'(z)|} \leq m \lambda_{\Omega_0}(z)^{1-\beta/\pi}$$

が Ω_0 上で成立する。

条件式(4.1) と、増本誠氏の論文 [6] における同じ方法を用いて次の結論を得る。

定理 4.3. Ω を有界な有限連結領域で各境界成分は連続体からなり、さらにその Green 関数が指数 α の Hölder 連続性を持つとする。このとき、 $\gamma(p, \alpha) = 2 - \alpha \min\{1, p\}$ ($1 < p < \infty$) とおく。もし Ω 上のある非負劣調和関数 s が

$$\iint_{\Omega} \delta_\Omega(z)^{-\gamma(p, \alpha)} s(z)^p dx dy < +\infty, \quad z = x + iy$$

を満たすならば s は恒等的に 0 でなければならない。

この結果は $\partial\Omega$ が $C^{1,1}$ 級で、 $\alpha = 1$ という特別な場合は鈴木紀明氏による結果 [9] と一致している。実際に証明は上記のような標準領域 Ω_0 に読み替えて鈴木氏の結果を用いて行われる。

特に先の補題と合わせて次の結論を得る。これは増本氏の (一様外部錐条件を満たす場合の) 結果 [6] をそのまま拡張したものになっている。

定理 4.4. $f : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ を上記のものとする。 Ω が開き角 $\beta \in [0, \pi]$ の一様一般外部錐条件を満たすならば、 $\gamma_p = 2 - \min\{1, p\}/(2 - \beta/\pi)$ と定めると

$$\iint_{\Omega} \delta_{\Omega}(z)^{-\gamma_p} s(z)^p dx dy < +\infty, \quad z = x + iy$$

を満たす Ω 上の非負劣調和函数は 0 以外に存在しない。

命題 4.1 の別の応用として、次の $g = f^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega_0$ の L^p -可積分性に関する結果を得る。

定理 4.5. Ω を有界な有限連結領域で puncture を持たないものとし、その Green 函数が境界の近傍において指数 α の Hölder 連続性を持つとする。 $g : \Omega \rightarrow \Omega_0$ を解析的弧で囲まれた領域への等角写像とすると、

$$\iint_{\Omega} |g'(z)|^p dx dy < +\infty, \quad z = x + iy$$

が任意の $0 < p < 2 + \alpha/(1 - \alpha)$ に対して成り立つ。従って開き角 $\beta \in [0, \pi]$ の一様一般外部錐条件を満たす有界な有限連結領域 Ω については、 $0 < p < 2 + \pi/(\pi - \beta)$ に対してこの式が成り立つ。

この結果は特に Ω が単連結の時には Brennan 予想と関係がある。Brennan 予想とは単位円板への等角写像 $g : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ としたとき、 $\iint_{\Omega} |g'(z)|^p dx dy < +\infty$ が任意の $0 < p < 4$ について成り立つであろう、というものである。現在の最良の値は $p < 3.39$ という Ch. Pommerenke によるものであるが、上の定理からは少なくとも $p < 3$ については常に正しいことが保証され、さらに β が大きければより良い結果が得られることになる。

REFERENCES

- [1] A. Ancona. On strong barriers and inequality of Hardy for domains in \mathbb{R}^n . *J. London Math. Soc.* (2), Vol. 34, pp. 274–290, 1986.
- [2] A. Baernstein II. Integral means, univalent functions and circular symmetrization. *Acta Math.*, Vol. 133, pp. 139–169, 1974.
- [3] A. F. Beardon and Ch. Pommerenke. The Poincaré metric of plane domains. *J. London Math. Soc.* (2), Vol. 18, pp. 475–483, 1978.
- [4] L. Carleson. Removable singularities of continuous harmonic functions on \mathbb{R}^m . *Math. Scand.*, Vol. 12, pp. 15–18, 1963.
- [5] L. L. Helms. *Introduction to Potential Theory*. Wiley-interscience, New York, 1969.
- [6] M. Masumoto. A distortion theorem for conformal mappings with an application to subharmonic functions. *Hiroshima Math. J.*, Vol. 20, pp. 341–350, 1990.
- [7] T. Sugawa. Various domain constants related to uniform perfectness. *Complex Variables*, pp. 311–345, 1998.
- [8] T. Sugawa. On boundary regularity of the Dirichlet problem for plane domains. Preprint, 1999.
- [9] N. Suzuki. Nonintegrability of harmonic functions in a domain. *Japan. J. Math.*, Vol. 16, pp. 269–278, 1990.