田島・渡部・宮崎 共著「工科の数学　微分積分」問の解答例

1.1 数列

問 1. 積の極限に関する公式のみ証明しておく．$\varepsilon > 0$ を与えられた正数とする．まず，$\lim a_n = a, \lim b_n = b$ とおけば，

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$$

数列 b_n は収束列なので有界，すなわち，ある正の実数 M があって $|b_n| < M$ がすべての自然数 n に対して成り立つ．また収束性の定義における ε としてそれぞれ $\varepsilon/2M, \varepsilon/(|a|+1)$ をとれば，ある N が存在して，$n \geq N$ ならば

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+1}$$

となる．したがって三角不等式より，$n \geq N$ ならば，

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leq |a_n - a|M + |a||b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|+1} = \varepsilon.$$

問 2. (1) 0　(2) 1/3　(3) 0　(4) 1　(5) $+\infty$

問 3. [1] $\beta < \alpha$ と仮定する．$\beta < c < \alpha$ となる数 c を取ると，十分大きな n に対しては $a_n > c, b_n < c$ となるが，これより $b_n < c < a_n$ となって $a_n \leq b_n$ の仮定に反する．[2] 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，収束の定義から，十分大きな自然数 N を取れば，$|a_n - \alpha| < \varepsilon, |b_n - \alpha| < \varepsilon$ が $n \geq N$ について成り立つ．よって，$-\varepsilon < a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha < \varepsilon$ より $|c_n - \alpha| < \varepsilon (n \geq N)$ が成り立ち，$c_n \to \alpha$ が言える．

問 4. 例：$a_n = 0, b_n = 1/n$.

問 5. (1) $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ だから，はさみうちの原理から，$|a_n| \to 0$ ならば $a_n \to 0$ である．逆に，$a_n \to 0$ とすると，収束の定義から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな n について $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ となるが，これから $-\varepsilon < |a_n| < \varepsilon$ が従い，$|a_n| \to 0$ が言える．(2) 収束の定義を使えば明らか．

問 6. (1) 0 (2) 0 （はさみ打ちの原理を使う）

問 7. $r > 1$ のときは，$r^n > 1 + n(r-1)$ で右辺は $+\infty$ に発散するから，左辺もそうである．$0 < |r| < 1$ のときは，$(1/|r|)^n \to +\infty$ であり，$|r^n| = 1/(1/|r|)^n$ より $|r^n| \to 0$ が言える．$r \leq -1$ のときは，絶対値が 1 以上で，符号が交互に変わるので振動する．

問 8. (1) 3　(2) $\sqrt{3}$　（したがって，a_n をいくつか計算すると $\sqrt{3}$ の近似分数が得られる．コンピュータか電卓で計算してみよ．）

問 9. (1) $b_n = na^n$ とおけば，$|b_{n+1}/b_n| = |a|(1 + \frac{1}{n}) \to |a| < 1$ となり，定理 1.1(2) より $b_n \to 0$ が言える．(2) $b_n = n^\alpha / a^n$ とすると，$|b_{n+1}/b_n| = (1 + \frac{1}{n})^\alpha / a \to 1/a < 1$ より，同様に $b_n \to 0$ である．

問 10. (1) $a_1 \cdots a_n = (n+1)^n / n!$, $b_1 \cdots b_n = (n+1)^{n+1}/n!$ (2) $a_k < e < b_k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ より明らか．(3) 前問の不等式で n 乗根を取る．

問 11. (1) $(1-1/n)^n = [(n-1)/n]^n = [n/(n-1)]^{-n} = \{[1+1/(n-1)]^{n-1}\}^{-n/(n-1)} \to e^{-1}$ (2) $(1-1/n^2)^n = [(1-1/n^2)^{n^2}]^{1/n} \to (e^{-1})^0 = 1$. (3) 前問と同様.

1.2　級数とその和

問 1. 級数の和（極限）S が存在した，という点が誤り.

問 2. (1) $S_n = \frac{1}{3}[1-1/(3n+1)] \to \frac{1}{3}$. (2) まず $\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}]$ に注意する．面倒なので n が 3 の倍数の場合にのみ部分和を書けば（他の場合も同様）$S_n = \frac{1}{3}[1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}] \to \frac{11}{18}$. (3) $S_n = (1-1/2^n) + \frac{1}{2}(1-1/3^n) \to \frac{3}{2}$.

問 3. (1) $S_n = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1} \to a_1 - \alpha$. (2) 前問において $a_n = 1/b_n$ とすればよい（$\alpha = 0$）.

問 4. 収束級数についてはあり得ない.

問 5. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ より，$a_1 + \cdots + a_n = \sqrt{n+1} - 1 \to +\infty$ で級数は発散するが，$a_n \to 0$.

問 6. (1) $1/(1+2^n) < 1/2^n$ を用いる．(2) $1/(1+\sqrt{n}) \geq 1/(2\sqrt{n})$ を用いる．(3) $\sqrt{n}/(n^2+1) < \sqrt{n}/n^2 = 1/n^{3/2}$ を用いる.

問 7. (1) $a_{n+1}/a_n = 1/(n+1) \to 0$ でダランベールの判定法を用いる．(2) $a_{n+1}/a_n = 2/(1+1/n)^n \to 2/e < 1$ でダランベール．(3) $a_{n+1}/a_n \to 3/e > 1$ でダランベール.

問 8. (1) 各項は $n^{-\alpha}$ と比較可能なので，収束 $\Leftrightarrow \alpha > 1$ (2) 各項は $n^{-2\alpha}$ と比較可能なので，収束 $\Leftrightarrow \alpha > 1/2$

問 9. (1) 定理 1.8 を用いる．(2) 定理 1.5 を用いる.

問 10. $n = 2m-1, 2m$ と 2 項ずつをまとめてくくれば，$S = \sum_{m=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{2m-1-1}}{2(2m-1)-1} + \frac{(-1)^{2m-1}}{2(2m)-1}] = \sum_{m=1}^{\infty}[\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1}] = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(4m-3)(4m-1)}$　よって $S/2$.

問 11. (1) $n = 2m-1, 2m$ の項をまとめると $\frac{1}{m} - \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m+1}$ となり，この和は調和級数の一部となり発散する．(2) $n = 2m-1, 2m$ の項をまとめると $\frac{1}{(2m-1)^2} - \frac{1}{2m} = \frac{2m-(2m-1)^2}{2m(2m-1)^2}$ で，分母の次数 $-$ 分子の次数 $= 3-2 \leq 1$ なので，例 4 より発散する.

問 12. (1) 絶対値の和は収束級数 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}$ で押さえられるので絶対収束．(2) 収束性は定理 1.8 による．絶対値は $\sum 1/n^{1/2}$ となるので，例 2 より発散．(3) 項が 0 に収束しない．(4) 収束性は定理 1.8 による．絶対値の和は下から発散級数 $\frac{1}{n^{1/2}}$ で押さえられるので，絶対収束しない.

2.1　初等関数とその性質

問 1. 省略.

問 2. 例 4 (3) のグラフを x 軸方向に -1 ずらしたもの.

問 3. 省略

問 4. 省略

問 5. (1) $(x/a)^2-(y/b)^2=4$ より，図 2.7 (ii) のタイプの双曲線．(2) $(x/a)^2-(y/b)^2=-4$ より，図 2.7 (iii) のタイプの双曲線．

問 6. (1) $y=(X-1/X)/2,\ X=e^{ax}$, を X について解けばよい．(2), (3) も同様．

問 7. (1) $-\pi/2,-\pi/6,0,\pi/3,\pi/2$ (2) $\pi,3\pi/4,\pi/2,\pi/3,0$ (3) $-\pi/4,-\pi/6,0,\pi/3,\pi/4$

問 8. (1) $y=\arcsin(-x)$ とおくと，$-x=\sin y,\ -\pi/2\le y\le\pi/2$. これより $x=\sin(-y),\ -\pi/2\le -y\le\pi/2$ だから，$-y=\arcsin x$ で，これが所期の公式．(2), (3) も同様．

問 9. (1) $\alpha=\arcsin\frac{4}{5},\beta=\arcsin\frac{5}{13},\gamma=\arcsin\frac{10}{65}$ とおくと，$\sin\alpha=\frac{4}{5},\sin\beta=\frac{5}{13},\sin\gamma=\frac{10}{65}$. 加法定理などを用いて，$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=1$ を示す．最後に $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}$ に注意すれば，これから $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$ を得る．(2) も同様．

問 10. (1) c, e, l, m, o, p (2) a, d, e, f, g, h, k, l, m, o, p (3) e, l, m, o, p (4) b, i, j, n

2.2 関数の極限

問 1. たとえば，数列 $x_n=1/(n\pi)$ を入れて考えればよい．

問 2. (1) na^{n-1} (2) 1

問 3. (1) $\pi/2$ (2) $-\pi/2$ (3) $+\infty$ (4) 0

問 4. $\lim_{x\to a-0}f(x)=b$ であるとは，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して次の条件を満たす正数 $\delta>0$ が存在することである：$-\delta<x-a<0\ \Rightarrow\ |f(x)-b|<\varepsilon$.
$x\to a+0$ のときは，上の x の条件を $0<x-a<\delta$ に変えればよい．

問 5. (1) 1 (2) -1 (3) $\sqrt{a}$ (4) $-\sqrt{a}$

問 6. $x_n=a+1/n$ とすると定理 1.2 より $f(x_n)$ は極限値を持つ．関数 $f(x)$ の $x\to a+0$ の極限値がこれと一致することを示せばよい．$x\to b-0$ のときも同様．

問 7. 極限の定義に戻るのが早道ではあるが，数列に対する「はさみうちの原理」と定理 2.1 を組み合わせてもよい．

問 8. 不等式 $\cos x<\sin x/x<1\ (0<x<\pi/2)$ に注意して「はさみうちの原理」を用いる．

問 9. 省略．

問 10. $t=1/x$ とおき，$x\to+0\ \Leftrightarrow\ t\to+\infty$ に注意する．

問 11. 省略．((4) については，$x^x=e^{x\log x}$ に注意すればよい．)

問 12. (1) $(\tan x)/x\to 1\ (x\to 0)$ より，$\tan x=x+o(1)=O(x)\ (x\to 0)$. (2) 例 4 (1) から $\lim_{x\to 0}[\log(1+x)-x]/x=0$ であることに注意．(3) 例 4 (2) を用いる．(4) 例 4 (3) を用いる．

問 13. (1) 2 位 (2) $\frac{1}{3}$ 位 (3) $e^x = 1 + x + o(x)$ $(x \to 0)$ より，$e^{\sin x} - 1 = (1 + \sin x + o(\sin x)) - 1 = \sin x + o(x) = x + o(x)$ $(x \to 0)$ だから，1 位．(4) 1 位 (5) 2 位

2.3 導関数

問 1. $y - f(a) = (-1/f'(a))(x - a)$

問 2. (1) 右の接線 $y = x$ 左の接線 $y = -x$ (2) 右の接線 $y = 0$ 左の接線 $y = x$

問 3, 4, 5. 省略

問 6. $\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$, $\operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$, $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ に注意する．

問 7. (1) $1/\sin x$ (2) $1/\sqrt{a^2 - x^2}$ (3) $a/(a^2 + x^2)$

問 8. 省略

問 9. (1) $f''(x) = -f(x)$ に注意すればよい．(2) (1) を用いてもよい．

問 10. (1) $a^n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}$ (2) $\cos^2 x = (1+\cos(2x))/2$ を用いればよい．$n > 0$ に対して $y^{(n)} = 2^{n-1}\cos(2x + n\pi/2)$ (3) $(-1)^n n!(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}})$ (4) $y = 1/(1-x) - x^2 - x - 1$ より，$n > 2$ に対しては $y^{(n)} = n!/(1-x)^{n+1}$

問 11. (1) 省略 (2) (1) の関係式を用いて，帰納法により示す．

問 12. (1) $y' = 1/(1+x^2)$ から直ちに従う．(2) $u = 1 + x^2$ とおけば，$uy = 1$ だからライプニッツの公式を用いて

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(r)}y^{(n-r)} = 0 \quad (n > 0)$$

を得る．ここで $u' = 2x, u'' = 2, u^{(r)} = 0$ $(r > 2)$ に注意すれば求める式を得る．(3) (2) の式に $x = 0$ を代入して得られる式を用いて，あとは帰納法．

問 13. P の位置を $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ とする．その速度ベクトル，加速度ベクトルはそれぞれ $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$，$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t))$ と表される．仮定から速さの 2 乗 $C = |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ は一定であるので，この両辺を微分すると，積の微分の公式から，$0 = \mathbf{v}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}' = 2\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v} = 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}$ となり，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{v}$ が直交することが分かる．(ベクトルの微分が嫌なら，成分で書き下して同様の計算を行ってもよい．)

2.4 基本的な定理

問 1. $f(x) = \sin x - x\cos x$ とおくと $f(\pi) = \pi, f(3\pi/2) = -1$ となる．中間値の定理より $f(\xi) = 0$ となる $\xi \in (\pi, 3\pi/2)$ が存在する．

問 2. $f(x) = x^3$ とすれば，$f'(0) = 0$ だが $x = 0$ は極値ではない．

問 3. $\xi = (an + bm)/(n + m)$.

問 4. (1) $\xi = e - 1$ (2) $\xi = (a+b)/2$

問 5. $\theta = (4\sqrt{2} - 5)/3$

問 6. $\xi = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$

問 7. $n = 0:\ f(b) = f(a) + (b-a)f'(\xi)$

$n = 1:\ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 f''(\xi_1)/2 = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)(b-\xi_2)f''(\xi_2)$

$$n = 2: \qquad \begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 f''(a)/2 + (b-a)^3 f'''(\xi_1)/6 \\ &= f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 f''(a)/2 + (b-a)(b-\xi_2)^2 f'''(\xi_2)/2 \end{aligned}$$

$n = 3:$

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \frac{f''(a)}{2} + (b-a)^3 \frac{f'''(a)}{6} + (b-a)^4 \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24} \\ &= f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \frac{f''(a)}{2} + +(b-a)^3 \frac{f'''(a)}{6} + (b-a)(b-\xi_2)^3 \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{6} \end{aligned}$$

問 8. $n = 0:\ f(x) = f(0) + f'(\theta x)x$

$$n = 1: \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta_1 x)}{2!}x^2 = f(0) + f'(0)x + f'(\theta_2 x)(1-\theta_2)x^2$$

$$\begin{aligned} n = 2:\ f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta_1 x)}{3!}x^3 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta_2 x)}{2!}(1-\theta_2)^2 x^3 \\ n = 3:\ f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\theta_1 x)}{4!}x^4 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\theta_2 x)}{3!}(1-\theta_2)^3 x^4 \end{aligned}$$

（注意：上の $\theta, \theta_1, \theta_2$ は x に依存して決まる数であって，定数ではないことに留意せよ.）

問 9. pp.51-52 の [2], [3] を用いる.

問 10. (1) まず，$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$ であったことに注意する.
$\cos x = 1 - x^2/2 + O(x^4)$ より，

$$\begin{aligned} \sec x = \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - x^2/2 + O(x^4)} = 1 + (x^2/2 + O(x^4) + O((x^2/2)^2) \\ &= 1 + x^2/2 + O(x^4) = 1 + x^2/2 + o(x^3) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x - x^3/6 + O(x^5)}{1 - x^2/2 + O(x^4)} \\ &= (x - x^3/6 + O(x^5))(1 + x^2/2 + O(x^4)) \\ &= x + (1/2 - 1/6)x^3 + O(x^5) = x + x^3/3 + o(x^4)\end{aligned}$$

以下の問題はテイラー展開を用いてもよいが，導関数の展開を積分する方が楽である．(3) $1/\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + x^2/2 + O(x^4)$ を 0 から x まで積分して

$$\arcsin x = x + x^3/6 + O(x^5) = x + x^3/6 + o(x^4)$$

を得る．(4) $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + O(x^4)$ を 0 から x まで積分して

$$\arctan x = x - x^3/3 + O(x^5) = x - x^3/3 + o(x^4)$$

を得る．

問 11. (1) $\log(x+1) = x - x^2/2 + O(x^3)$ $(x \to 0)$ より，

$$(x - \log(x+1))/x^2 = (x^2/2 + O(x^3))/x^2 = 1/2 + O(x) = 1/2 + o(1) \ (x \to 0)$$

したがって，極限の値は $1/2$ となる．(2) $x = 1/t$ とおけば，$x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0+$ である．よって，通例の記号 $\exp x = e^x$ を用いて，$t \to 0$ のとき

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} &= \left(\frac{1+t}{1-2t}\right)^{2/t-1} = \exp\left(\left(\frac{2}{t} - 1\right)\log\frac{1+t}{1-2t}\right) \\ &= \exp\left(\left(\frac{2}{t} - 1\right)(\log(1+t) - \log(1-2t))\right) \\ &= \exp\left(\left(\frac{2}{t} - 1\right)(t + O(t^2) - (-2t + O(t^2))\right) \\ &= \exp\left(\left(\frac{2}{t} - 1\right)(3t + O(t^2)\right) \\ &= \exp(6 + O(t)) = \exp 6 + O(t)\end{aligned}$$

となるので，極限値が $\exp 6 = e^6$ であることが分かる．

2.5　関数の性質

問 1. $h(x) := f(x) - g(x)$ に対して平均値の定理を適用．(あるいは，単調性を両側で用いてもよい．)

問 2. $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ で $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ の時に限るから，この区間で狭義単調増加である．

問 3. (1) $f(x) = x - \log(1+x)$ とおけば，$f'(x) = x/(1+x) > 0$ より $f(x)$ は狭義単調増加．よって，$f(x) > f(0) = 0$ $(x > 0)$. (2) $f(x) = e^x - (1 + x + x^2/2)$ とすると，$f''(x) = e^x - 1 > 0$ より $f'(x) > f'(0) = 0, f(x) > f(0) = 0$ が従う．(3) まず，$\sin x < x$ を示す．次に $f(x) = \sin x - (x - x^3/6)$ とおけば，$f'(x) = \cos x - 1 + x^2/2$, $f''(x) = -\sin x + x > 0$ より，$f'(x) > f'(0) = 0$, $f(x) > f(0) = 0$.

問 4. (1) $y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ より，$\alpha > 1$ または $\alpha < 0$ ならば $y'' > 0$ となり，凸性が分かる．$0 < \alpha < 1$ の時は $y'' < 0$ より，凹である．(2) 前問を使えば，$\alpha > 1$ または $\alpha < 0$ のとき，凸性から $y = x^\alpha$ のグラフは $x = 1$ における接線 $y = \alpha(x-1)+1$ より上にあることから所期の不等式が得られる．凹の場合も同様．

問 5. (1) e^x の凸性から，$x = 0$ における接線 $y = x+1$ と比較する．(2) $\log x$ の凹性から，$x = 1$ における接線 $y = x-1$ と比較する．

問 6. 省略

問 7. $y' = 12x^2(x-1)$ より，極値点の候補は $x = 0, 1$ である．$y'' = 12x(3x-2), y''' = 24(3x-1)$ より，$x = 0$ において $y'' = 0, y''' < 0$ だから，$x = 0$ は変曲点であり，極値点ではない．一方，$x = 1$ においては $y'' = 12 > 0$ より，$y = 0$ は極小値である．

問 8. ロピタルの定理による解法と，ランダウ記号による解法の２通りで計算する．(ロピタルの定理による計算は，講義でも述べたように，計算の逆をたどるのが論理的に正しいが，以下では面倒なので極限が存在するという前提の下で計算する．)

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/\cos^2 x - 1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2$$

一方，$x \to 0$ の時，$\tan x = x + x^3/3 + O(x^5), \sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$ より，

$$\frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \frac{x^3/3 + O(x^5)}{x^3/6 + O(x^5)} = \frac{1/3 + O(x^2)}{1/6 + O(x^2)} = 2 + O(x^2)$$

となり，極限値は 2 と分かる．(2) 対数を取れば，$\frac{\log\cos x}{x^2}$ となるので，これにロピタルを使えば，$\frac{-\tan x}{2x} \to -1/2$ より，求める極限値が $e^{-1/2}$ であることが分かる．一方，$\log\cos x = \log(1 - x^2/2 + O(x^4)) = -x^2/2 + O(x^4)$ より，$(\log\cos x)/x^2 = -1/2 + O(x^2)$ となるので，同じ極限値を得る．(3) $(\pi/2 - \arctan x)/(1/x)$ にロピタルを使えば，$(-\frac{1}{1+x^2})/(-\frac{1}{x^2}) = x^2/(1+x^2) \to 1\ (x \to +\infty)$ となるので，求める極限値は 1 である．($t = 1/x$ と変換してからロピタルを用いてもよい．) 一方，ランダウ記号を使うには定積分を用いて

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \int_x^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \int_x^\infty \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2(1+t^2)}\right)dt = \frac{1}{x} + O(x^{-3})$$

を得るので，$x(\pi/2 - \arctan x) = 1 + O(x^2)$ となり，同じ極限値を得る．

3.1 不定積分

問 1. 省略

問 2. （以下，積分定数は省略．したがって，諸君の答えと定数差が生ずることがある．）(1) $2\sqrt{x}(1+x^2/5)$ (2) $x - \arctan x$ (3) $\frac{1}{12}\log|\frac{2x-3}{2x+3}|$ (4) $\mathrm{arcsinh}\,[2x/3]/2$ または $\frac{1}{2}\log(2x+\sqrt{4x^2+9})$ (5) $\arcsin(2x/3)/2$ (6) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$ (7) $a^x/\log a$ (8) $x(\log x - 1)/\log a$ (9) $\frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$ (10) $\sinh(2x)/4 - x/2$ (11) $x - \tanh(x)$

問 3. 省略（p.75 の公式参照）

問 4. (1) $\frac{-1}{3(x^3+4)}$ (2) $\arctan(x^4)/4$ (3) $-\sqrt{a^2-x^2}$ (4) $-4\arctan(x+2)+\frac{3}{2}\log(x^2+4x+5)$ (5) $-\frac{3}{4}\cosh x+\cosh(3x)/12$ (6) $x^2(\log x^2-1)/4$ (7) $(\log x)^5/5$ (8) $-\frac{1+3e^{2x}}{12(1+e^{2x})^3}$

問 5. (1) $x^{1+\alpha}((1+\alpha)\log x-1)/(1+\alpha)^2$ (2) $x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$ (3) $\frac{1}{4}(x\sqrt{1-x^2}+(2x^2-1)\arcsin x)$

問 6. $u'=1, v=(\log x)^n$ として部分積分の公式を適用.

問 7. 証明は省略. $I_3=-x(x^2-6)\cos x+3(x^2-2)\sin x$, $J_4=4x(x^2-6)\cos x+(x^4-12x^2+24)\sin x$

3.1 不定積分

（以下では答えの一つを示すが，積分の仕方によって定数差が生じたり，定数差がなくても見かけ上異なることがしばしば起こる．そのような場合，自分の答えが正しいかどうか確認するには，微分してみることも有効である.）

問 8. (1) $\frac{1}{3}\log|1+x|-\frac{1}{6}\log|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{2}{5}\arctan\frac{x}{2}-\frac{3}{5}\arctan\frac{x}{3}$ (3) $\frac{1}{2}\arctan x-\frac{x}{2(1+x^2)}$ (4) $\frac{1-x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log|1+x^2|-\frac{1}{2}\arctan x$

問 9. (1) $\frac{1}{12}\log|1-x^4|-\frac{1}{24}\log|x^8+x^4+1|-\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^4+1}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{1}{5}[\frac{1}{1+x^5}+5\log|x|-\log|1+x^5|]$ (3) $\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}-\arctan\frac{1}{x}$ (4) $\log|\frac{x+1}{x+2}|-\frac{x+1}{x+2}$ (5) $\frac{x(3x^2-5)}{8(x^2-1)^2}+\frac{3}{16}\log|\frac{x-1}{x+1}|$ (6) $\frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{x^2}-\frac{x^2+1}{2x^2}$

問 10. (1) $\log|\sin x|$ (2) $-\log|\cos x|$ (3) $\log|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}|=\log|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|$ (4) $\log|\tan\frac{x}{2}|$ (5) $\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x$ (6) $\frac{3}{64}\sin x-\frac{1}{64}\sin 3x-\frac{1}{320}\sin 5x+\frac{1}{448}\sin 7x$ (7) $\log|\cos x|+\frac{1}{2\cos^2 x}$ (8) $\frac{1}{3\cos^3 x}$

問 11. (1) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log|\frac{\sqrt{2}+\tan x}{\sqrt{2}-\tan x}|$ (2) $\frac{2}{3}\tan x+\frac{\sin x}{3\cos^3 x}$ (3) $\frac{ax+b\log|a\cos x+b\sin x|}{a^2+b^2}$ (4) $x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log|\frac{\sqrt{2}+\tan x}{\sqrt{2}-\tan x}|$

問 12. (1) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\log|\frac{\sqrt{2}+1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}-1-\tan(x/2)}|$ (2) $-\frac{1}{4}\log|\frac{9\cos(x/2)+3\sin(x/2)}{\cos(x/2)-3\sin(x/2)}|$ (3) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}+\log(2+\cos x)$ (4) $\frac{1}{64}(24\log|\tan\frac{x}{2}|+\tan^4\frac{x}{2}+8\tan^2\frac{x}{2}-\cot^4\frac{x}{2}-8\cot^2\frac{x}{2})$

問 13. (1) $-\frac{5}{8}\cos x+\frac{5}{48}\cos 3x-\frac{1}{80}\cos 5x$ (2) $\frac{5x}{16}+\frac{15}{64}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{192}\sin 6x$ (3) $-\log|\cos x|-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{4\cos^4 x}$ (4) $-x+\frac{23}{15}\tan x-\frac{11\sin x}{15\cos^3 x}+\frac{\sin x}{5\cos^5 x}$ (5) $\frac{\tan(x/2)+\tan^3(x/2)}{(\tan^2(x/2)-1)^2}+\operatorname{arctanh}\tan(x/2)$ (6) $\frac{1}{24}\tan^3\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{24}\cot^3\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\cot\frac{x}{2}$ (7) $\log|\sin x|+\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}$

問 14. (1) $-\frac{3}{64}\cos 2x+\frac{1}{192}\cos 6x$ (2) $\frac{3}{128}\sin x-\frac{1}{192}\sin 3x-\frac{1}{320}\sin 5x+\frac{1}{1792}\sin 7x+\frac{1}{2304}\sin 9x$ (3) $-\frac{1}{\sin x\cos^2 x}+\frac{3\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{3}{2}\log|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|$ (4) $-\frac{1}{3}\cot^3 x$

問 15. 省略

問 16. (1) $\frac{(3a^2-2x^2)x}{3a^4(a^2-x^2)^{3/2}}$ (2) $\frac{(5a^2+2x^2)x^3}{15a^4(x^2+a^2)^{5/2}}$ (3) $\frac{(2+x^2)\sqrt{x^2-4}}{24x^3}$

問 17. (1) $\frac{1}{\sqrt{21}}(\log|x+5|-\log|2\sqrt{21}\sqrt{x^2+x+1}-9x-3|)$ (2) $\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}$

3.3 定積分

問 1. 省略

問 2. (1) $1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0 < x < 1/2)$ を積分すればよい．(2) $1 < e^{x^2-x} < e^2$ $(1 < x < 2)$ を積分すればよい．

問 3. グラフを平均化した時の値をちょうど与えるような点が区間内に取れることを意味する．(グラフの面積を考えよ．)

問 4. (1) $\frac{\log 2}{2}$ (2) $\arcsin \frac{1}{\pi}$

問 5. (1) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{1}{4}$

問 6. (1) 対数を取ればよい．(2) 省略

問 7. (1) $\frac{2\log 2}{\pi}$ (2) $\frac{a\log a}{1-a} - 1$ (3) $\frac{\pi a}{4}$

問 8. (1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$ (2) $-2x\cos x^4$ (3) $-4x^4\cos x^8 + 5x^4\cos x^{10}$

問 9. (1) $\frac{e-1}{2}$ (2) $\frac{\log 5}{2}$ (3) $\frac{\pi^2-8}{4}$ (4) $4\log 2 - \frac{15}{16}$

問 10. 省略

問 11. (1) $1 - \frac{\pi}{4}$ (2) 2

問 12, 13. 省略

問 14. (1) $\frac{3\pi}{16}$ (2) $\frac{8}{15}$ (3) $\frac{5\pi}{32}$

問 15. (1) 省略 (2) $(2n-1)!!(2n)!! = (2n)!$ に注意すればよい．

問 16. 省略

問 17. (1) $\frac{8}{315}$ (2) $\frac{3\pi}{256}$ (3) $\frac{1}{24}$

問 18. 簡単な置換積分による．

問 19. 省略

問 20. (1), (2) 例 5 と同様．(3) $\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$ であり，これは $b \to +\infty$ のとき振動して収束しないので，広義積分は発散する．(4) 前問と同様．

問 21. (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$

問 22. 省略（２つの式を帰納法で同時に示すのがポイント）

問 23. (1) $\int_0^{\pi/2} |\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}| dx \le \int_0^{\pi/2} \frac{x}{x\sqrt{x}} dx = 2 < \infty$ より絶対収束．(2) $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ より，$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^3} dx \ge \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi x^2} dx = +\infty$ より発散．

問 24. 部分積分により，$B(m+1,n+1)=\frac{m}{n+1}B(m,n+2)$ を得る．これを繰り返して $B(m+1,n+1)=\frac{m!}{(n+1)\cdots(n+m)}B(1,m+n+1)$. ここで，$B(1,m+n+1)=\frac{1}{m+n+1}$ より，所期の結果を得る．

問 25. 一般に $\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$ $(\lambda>0)$ となることは部分積分により容易に分かる．$\Gamma(1)=1$ に注意すれば，帰納法より結論を得る．

3.4 定積分の応用

問 1. 省略（(2), (3) は p.113 の公式 (3) を用いよ．）

問 2. (1) 回転体の x における切片は同心円環で，その面積は $\pi(b+\sqrt{r^2-x^2})^2-\pi(b-\sqrt{r^2-x^2})^2=4\pi b\sqrt{r^2-x^2}$ である．よって，体積は $V=2\pi b r^2$ (2) $V=\int_0^{2\pi}\pi y^2dx=a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=5a^3\pi^2$

問 3. (1) $(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$ より，$s=\int_0^{2\pi}2a\sin(t/2)dt=8a$ (2) パラメータの範囲は $0\le\theta\le 2\pi$ と考えると，公式 (10) より $s=a(\pi+\frac{3\sqrt{3}}{8})$（この場合，曲線は閉曲線ではない．パラメータの範囲はこの問では指定されていないので，答えはその選び方によって変化する．）

★　間違いの指摘・疑問点については須川 (sugawa@math.is.tohoku.ac.jp) まで．